
Math
5158
99.5
HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY


SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS

Die Metrik
in
projektivischen Koordinaten.

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der hohen philosophischen Fakultät
der
UNIVERSITÄT ZÜRICH

eingereicht von
Rudolf Gerlach
aus Zürich.

Begutachtet von den Herren
Professor Dr. H. Burkhardt und
Privatdozent Dr. A. Weiler.

Zürich
Druck von Zürcher & Furrer
1899.

Vorrede.

Bei analytischen Untersuchungen geometrischer Raumformen werden hauptsächlich zwei lineare Koordinatensysteme verwendet. Das eine, das rechtwinklige System, wurde zuerst von Cartesius für Punktkoordinaten und von Plücker für Ebenenkoordinaten benützt, das andere, das projektivische oder Tetraedersystem, ist neueren Datums. Diese beiden Systeme bilden keinen Gegensatz, sondern das eine ist die äusserste Spezialisierung des andern. Es kann das rechtwinklige System als ein Tetraedersystem aufgefasst werden, in welchem eine Ebene im Unendlichen liegt, das darin enthaltene Dreieck ein Polardreieck des absoluten Kegelschnittes ist und in welchem endlich der Einheitspunkt eine bestimmte Lage hat. Zwischen diesen beiden Formen liegen eine Reihe von Zwischenformen, die wir hier indessen nicht berücksichtigen. Infolge der ausgezeichneten Lage zum Absoluten eignet sich das rechtwinklige System besonders zu Untersuchungen metrischer Natur, während das allgemeine Tetraedersystem dann Verwendung findet, wenn man mit einer Raumform zugleich alle ihre projektivisch verwandten untersuchen will. Es sind daher auch nur für das rechtwinklige System oder demselben naheliegende Zwischenformen in systematischer Weise metrische Formeln aufgestellt worden.

In der vorliegenden Arbeit sollen nun die metrischen Formeln in allgemeinen projektivischen Koordinaten entwickelt werden. Es lässt sich von vornherein erwarten, dass die aufzustellenden Formeln infolge der allgemeinen Form und Lage des Koordinatensystems nicht so einfach ausfallen werden wie beim rechtwinkligen System; dass man aber dennoch nicht zu solch umfangreichen Formeln gelangt, dass deren praktische Verwendung verunmöglicht wird, ist das Ziel dieser Arbeit.

Die gestellte Aufgabe möchte vielleicht nach der entwickelten Anschauung als eine überflüssige erscheinen. Wenn auch dieser Einwurf im Bereiche der Punkt- und Ebenenkoordinaten zum Teil berechtigt sein mag, so gilt er sicher nicht mehr im Bereiche der Strahlenkoordinaten des Raumes und zwar aus folgendem Grunde. Lässt man in der angegebenen Weise ein rechtwinkliges System aus einem Tetraedersystem entstehen, so geht eine der vier Punkt- oder Ebenenkoordinaten verloren; da aber die übrigen symmetrisch auftreten, bleiben auch die Formeln im speziellen Systeme symmetrisch. Anders hingegen bei Strahlenkoordinaten. Hier erhalten drei der sechs Koordinaten eine geometrische Bedeutung, die von derjenigen der drei andern verschieden ist. Dadurch wird eine unsymmetrische Behandlung eingeführt, welche beim allgemeinen System vermieden wird. Hier ist es aber gerade die Symmetrie, welche die metrischen Formeln im Strahlenraum übersehen lässt*). Der Entwicklung der Metrik in Strahlenkoordinaten muss aber diejenige in Punkt- und Ebenenkoordinaten vorangehen.

Solche metrische Formeln sind wohl hie und da im Bereiche der Punkt- und Ebenenkoordinaten als Beispiele oder zu speziellen Untersuchungen aufgestellt worden (z. B. Salmon-Fiedler, Anal. Geom. der Kegelschnitte § 71, Klein, Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie). Eine systematische Behandlung hat aber die gestellte Aufgabe, so viel mir bekannt, nicht erfahren. Bei Strahlenkoordinaten ist meines Wissens nur die Formel über das Moment zweier Geraden, welche Formel aber in dieser Gestalt nur in speziellen Fällen Gültigkeit hat, aufgestellt worden; und es konnten wohl auch kaum Formeln aufgestellt werden, so lange nicht die absoluten Werte der Strahlenkoordinaten fixiert waren.

Zur Lösung der gestellten Aufgabe bieten sich von vornherein zwei Wege dar. Auf dem einen Wege geht man von der entsprechenden Formel in rechtwinkligen Koordinaten aus und untersucht ihre Bedeutung in Bezug auf das Absolute, wodurch die Formel projektivischen Charakter gewinnt. Es hat dann keine Schwierigkeit mehr, diese Formel im projektivischen System aus-

*) Es waren auch Untersuchungen über die Metrik der Komplexe zweiten Grades, die mich auf die Notwendigkeit eines diesbezüglichen Formelnapparates führten.

zudrücken und die Konstanten durch spezielle Fälle zu bestimmen. Dabei müssen die Formeln in Bezug auf die sämtlichen darin vorkommenden Variabeln homogen von der Dimension null sein und werden daher mit homogenisierenden Faktoren belastet, die an und für sich mit der gestellten Aufgabe nichts zu thun haben.

Der zweite Weg, der in der vorliegenden Arbeit eingeschlagen wurde und deshalb etwas ausführlicher besprochen werden soll, ist der folgende. Vor allem werden nicht nur die Verhältnisse der homogen auftretenden Koordinaten berücksichtigt, sondern auch deren absolute Werte, die in bestimmter Weise fixiert werden. Es brauchen infolgedessen die metrischen Formeln nicht homogen zu sein und die homogenisierenden Faktoren werden daher überflüssig. Nach Fixierung der absoluten Werte der Koordinaten werden dieselben einer nicht homogenen, linearen oder quadratischen Gleichung genügen. Ersetzt man in einer solchen Gleichung das konstante Glied durch Null, so erhält man eine homogene Gleichung, welche stets die unendlich ferne Ebene oder den darin gelegenen absoluten Kegelschnitt in der betreffenden Koordinatengattung darstellt. Man gelangt so zu zwei metrischen Funktionen

$$E(u \mid u) \text{ und } W(\xi \mid \xi),$$

von denen sich die eine auf Punkt-, die andere auf Ebenenkoordinaten bezieht. Mittels dieser beiden Funktionen, die einander dual gegenüberstehen, sowie deren partielle Ableitungen, lässt sich die gesamte Metrik darstellen.

Verfolgen wir nun den angegebenen Weg bei den verschiedenen Koordinatengattungen. Bei Punkt- und Ebenenkoordinaten zeigt ihre geometrische Definition, wie sie wohl zuerst von Prof. W. Fiedler ausgesprochen wurde, unmittelbar, wie deren absolute Werte zu definieren sind. Schwieriger war es für die absoluten Werte der Strahlenkoordinaten

$$p_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = y_{\mathfrak{a}}\, x_{\mathfrak{b}} - y_{\mathfrak{b}}\, x_{\mathfrak{a}} \text{ und } \pi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \eta_{\mathfrak{a}}\, \xi_{\mathfrak{b}} - \xi_{\mathfrak{b}}\, \eta_{\mathfrak{a}}$$

eine passende Definition aufzustellen. Geht man bei Anwendung der erstern von dem Punktepaar $(x_{\mathfrak{a}})$ $(y_{\mathfrak{a}})$, welches den Strahl definiert, zu einem andern Punktepaar desselben Strahles über, so werden sich die sämtlichen Koordinaten um denselben Faktor

ändern. Dieser Faktor hängt nur von der Distanz der definierenden Punkte ab, nicht aber von der Lage des Punktepaares auf dem Strahle. Nimmt man daher für jene Distanz eine bestimmte, etwa die Einheit, so gelangt man, abgesehen von einem allen Koordinaten gemeinsamen Zeichenwechsel, zu vollständig bestimmten Koordinaten p_{ab}. Es gelingt daher auch, wenn $p_{23}, p_{31}, p_{12}, p_{14}, p_{24}, p_{34}$ irgend sechs Zahlen sind, welche der Gleichung

$$p_{23}\, p_{14} + p_{31}\, p_{24} + p_{12}\, p_{34} = 0$$

genügen, die Distanz zu berechnen, in welcher wir auf dem entsprechenden Strahle zwei Punkte annehmen müssen, damit ihre Koordinaten gerade die Werte p_{ab} liefern. — Aehnliches ist von den Strahlenkoordinaten π_{ab} zu sagen, welche sich aus den Koordinaten zweier Ebenen des Strahles berechnen lassen.

Nach Festsetzung der absoluten Werte der Strahlenkoordinaten p_{ab} und π_{ab} hat nun auch die Frage nach dem Faktor τ in der Gleichung

$$\pi_{ab} = \tau \,.\, p_{cd}$$

(a, b, c, d, eine gerade Permutation von 1, 2, 3, 4) einen bestimmten Sinn. Da π_{ab} und p_{cd} von den Dimensionen 0 und — 1 sind, so ist τ ein Linearfaktor, von dem gezeigt wird, dass er für alle Strahlen des Raumes denselben Wert hat, der in einfacher Weise von den Dimensionen des Fundamentaltetraeders und der Lage der Einheitselemente abhängt.

Was endlich die neu eingeführten Koordinaten anbelangt, so habe ich folgendes zu bemerken. Die Differenzen

$$y_a - x_a$$

der Koordinaten zweier Punkte x_a und y_a sind nur abhängig von der Distanz der beiden Punkte und der Richtung ihrer Verbindungslinie. Nimmt man daher jene Distanz als eine bestimmte an, so kann man

$$w_a = y_a - x_a$$

als Koordinaten einer Richtung auffassen. Diese entsprechen den Richtungskosinussen im rechtwinkligen System. Wie diese der Gleichung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

genügen, so erfüllen jene die Gleichung

$$-1 = E(w).$$

In einfacher Weise kann nun zu jedem Strahle p_{ab} seine Richtungskoordinaten und zu jeder Ebene die normale Richtung berechnet werden. Daraus ergiebt sich schon die Wichtigkeit der Richtungskoordinaten, welche nicht in gleicher Weise den Stellungskoordinaten zukommt.

Diese Stellungskoordinaten sind nichts anderes als die Koordinaten eines unendlich fernen Strahles. Ein solcher Strahl unterscheidet sich in projektivischer Hinsicht in keiner Weise von einem im Endlichen gelegenen Strahle; bezüglich der Metrik hingegen erfordert er eine andere Behandlungsweise. Ein unendlich ferner Strahl kann aufgefasst werden als die Verbindungslinie zweier Richtungen oder als Schnittlinie zweier parallelen Ebenen. Es zeigt sich nun wieder, dass man zu bestimmten Zahlen gelangt, wenn jene Richtungen einen festen Winkel (z. B. einen rechten) bilden oder wenn jene Ebenen einen bestimmten Abstand (z. B. die Einheit) besitzen.

Die Fixierung der absoluten Werte der homogenen Punkt- und Ebenenkoordinaten ist wohl nirgends ernstlich in Betracht gezogen worden. Dies hat seinen Grund in der historischen Einführung der homogenen Koordinaten. Die Strahlenkoordinaten sind dagegen von Anfang an in homogener Form aufgetreten und lag daher die Frage nach absoluten Werten näher. Zeuthen hat in seiner Arbeit: Bemerkungen zu einem linearen Koordinatensystem (Math. Annal. Bd. 1) die Strahlenkoordinaten mechanisch definiert, indem er auf dem Strahle die Krafteinheit annahm und deren Moment in Bezug auf die Tetraederkanten betrachtete. Dadurch erhielt er von vornherein bestimmte Zahlen. Zeuthen leitet auch die nicht homogene Bedingungsgleichung ab, der seine Strahlenkoordinaten genügen müssen, verfolgt aber die sich darbietenden Gedanken nicht weiter.

Was nun die Stoffverteilung, welche aus dem Inhaltsverzeichnis hervorgeht, anbelangt, so möchte ich folgendes bemerken:

Ich habe den Betrachtungen im Raume solche in der Ebene vorausgeschickt, da ich für die erstern einige Resultate der letztern gebrauche. In gleicher Weise hätte ich noch Betrachtungen mit Hülfe von Triederkoordinaten vorausschicken können, umsomehr da in metrischer Hinsicht die Geometrie im Bündel sich etwas

anders verhält als die Geometrie im Felde. Ich habe dennoch vorgezogen, die Triederkoordinaten wegzulassen, um nicht allzu oft gleichartige Entwicklungen wiederholen zu müssen; ich durfte dies umsomehr, als eigentlich in den Tetraederkoordinaten die Triederkoordinaten mitenthalten sind.

In der vorliegenden Arbeit, welche die elementaren Aufgaben der analytischen Geometrie in projektivischen Koordinaten löst, wird man das Problem der Transformation zu einem andern Systeme vermissen. Dieses Problem ist indessen von Herrn Prof. Fiedler im 24. Bande der Viertelsjahrsschrift der Zürcher Naturforschenden Gesellschaft vollständig gelöst worden; es wäre von dem hier eingenommenen Standpunkt aus nur noch Unwesentliches hinzuzufügen.

Wichtiger wäre die Behandlung der imaginären Elemente, namentlich für den Strahlenraum. Aber auch darauf musste ich verzichten. Abgesehen davon, dass die vorliegende Arbeit zu umfangreich geworden wäre, so hätte die Aufnahme eines diesbezüglichen Kapitels den Schwerpunkt der Arbeit um ein Bedeutendes verschoben und der einheitliche Standpunkt derselben wäre verletzt worden. Ich hoffe bei einer andern Gelegenheit dies nachholen zu können.

Damit habe ich nun schon die Anwendbarkeit der hier entwickelten Resultate angedeutet. Des weitern wären noch die mechanischen Anwendungen und dann namentlich die Metrik der linearen und quadratischen Strahlenkomplexe zu erwähnen. Doch ist es hier nicht der Ort, darauf näher einzutreten.

Es erübrigt mir nur noch, Herrn Prof. Burkhardt für seine rege Mithülfe bei der letzten Redaktion dieser Arbeit meinen wärmsten Dank auszusprechen. R. G.

Inhalt.

I. Dreieckskoordinaten.

A. Punktkoordinaten.

B. Linienkoordinaten.

II. Tetraederkoordinaten.

A. Punktkoordinaten.

B. Ebenenkoordinaten.

C. Einige Formeln über das Tetraeder.

D. Normalenprobleme.

III. Strahlenkoordinaten.

A. Strahlen des endlichen Raumes.

B. Stellungskoordinaten.

I.

Dreieckskoordinaten.

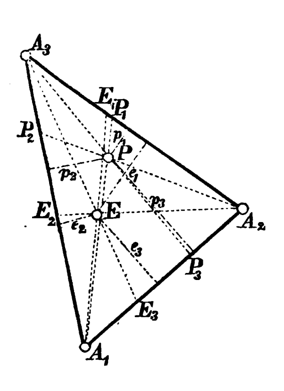
A. Punktkoordinaten.

1. Man erhält bekanntlich die allgemeinsten Dreieckskoordinaten dadurch, dass man in dem Fundamentaldreieck $A_1\ A_2\ A_3$ einen Einheitspunkt E annimmt und die Abstände p_1, p_2, p_3 eines beliebigen Punktes P von den Seiten des Dreiecks durch die gleichnamigen Abstände e_1, e_2, e_3 dieses Einheitspunktes E misst. Bezeichnet man diese Koordinaten mit

$$x_a = p_a : e_a,\ (a = 1, 2, 3)$$

so ist

$$x_2 : x_3 = (A_2\ A_3\ E_1\ P_1),$$
$$x_3 : x_1 = (A_3\ A_1\ E_2\ P_2),$$
$$x_1 : x_2 = (A_1\ A_2\ E_3\ P_3),$$

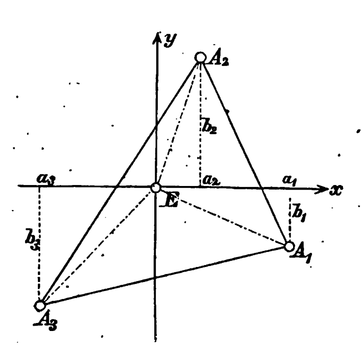


wo E_1, E_2, E_3 und P_1, P_2, P_3 die Projektionen der Punkte E und P aus den Ecken des Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten sind (Fiedler, „Darstell. Geom." III. § 15). Es sind somit zur Bestimmung der Lage eines Punktes nur die Verhältnisse der x_a notwendig. Zur Ableitung metrischer Formeln sind dagegen die obigen Werte der Koordinaten erforderlich. Da diese Unterscheidung für das Folgende von Wichtigkeit ist, so wollen wir die durch

$$x_a = p_a : e_a$$

definierten Koordinaten die genauen oder wahren Koordinaten eines Punktes nennen zum Unterschiede gegen die Verhältniskoordinaten.

2. Metrische Formeln lassen sich am leichtesten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem ablesen. Der Grund liegt darin, dass in diesem Falle eine Seite des Fundamentaldreiecks mit der unendlich fernen Geraden zusammenfällt und die beiden andern in Bezug auf die absoluten Kreispunkte harmonisch konjugiert sind. Es liegt daher nahe, wenn man in projektivischen Koordinaten metrische Formeln ableiten will, mit dem Fundamentaldreieck ein rechtwinkliges System zu verbinden und die metrischen Formeln durch Transformation aus dem rechtwinkligen System abzuleiten.



Diese Transformation nimmt wohl dann die einfachste Form an, ohne indessen an Symmetrie einzubüssen, wenn man den Anfangspunkt des rechtwinkligen Systems mit dem Einheitspunkt des Dreiecks zusammenfallen lässt, welchen Punkt wir im Normalfall immer im Innern des Dreiecks uns vorstellen wollen. Sind die rechtwinkligen Koordinaten der Ecken des Dreiecks

	x,	y,
A_1	a_1,	b_1,
A_2	a_2,	b_2,
A_3	a_3,	b_3,

so stellt

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{1}$$

die doppelte Fläche des Fundamentaldreiecks dar. Nach der letzten Spalte entwickelt ergibt diese Determinante

$$\Delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \tag{2}$$

wo δ_1, δ_2, δ_3 die doppelten Flächeninhalte der Dreiecke sind, welche E mit den Seiten A_2A_3, A_3A_1 und A_1A_2 bildet.

Bezeichnet man mit

$$\begin{matrix} \alpha_1\,\delta_1 & \beta_1\,\delta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2\,\delta_2 & \beta_2\,\delta_2 & \delta_2 \\ \alpha_3\,\delta_3 & \beta_3\,\delta_3 & \delta_3 \end{matrix}$$

die Subdeterminanten des Systems

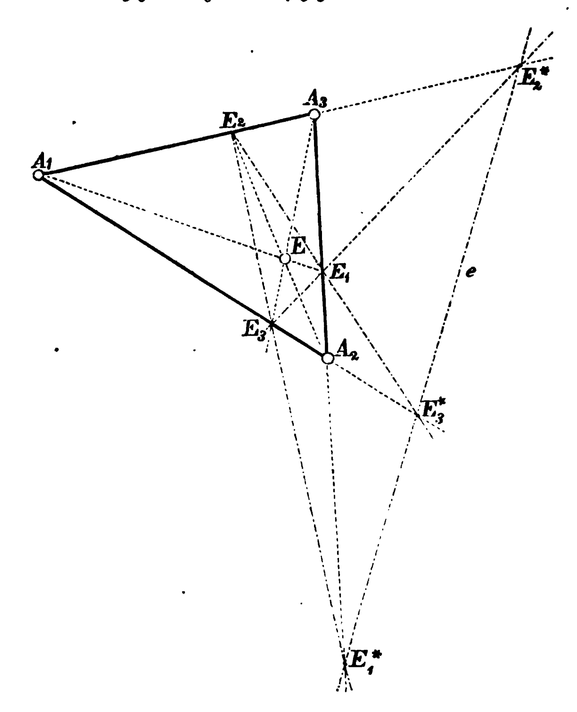
$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1, \end{matrix}$$

so sind die Gleichungen der Dreiecksseiten

$$\begin{aligned} g_1 &\equiv \alpha_1 x + \beta_1 y + 1 = 0, \\ g_2 &\equiv \alpha_2 x + \beta_2 y + 1 = 0, \\ g_3 &\equiv \alpha_3 x + \beta_3 y + 1 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

3. Die Gleichung der Einheitsgeraden sei

$$g_0 \equiv \alpha_0 x + \beta_0 y + 1 = 0. \tag{4}$$



Da wir annehmen, dass Einheitsgerade und Einheitspunkt durch das Fundamentaldreieck harmonisch getrennt werden, so müssen die Konstanten α_0 und β_0 der letzten Gleichung durch die früheren Konstanten bestimmt sein. Wir erhalten diese Bestimmung

folgendermassen: Es ist $g_2 - g_3 = 0$ die durch A_1 nach dem Einheitspunkt gehende Gerade und daher $g_2 + g_3 = 0$ diejenige Gerade, welche mit der erstern und den durch A_1 gehenden Dreiecksseiten ein harmonisches Büschel bildet, welche Gerade somit auch durch den Punkt E_1^* geht, der mit A_2, A_3 und E_1 eine harmonische Gruppe bildet. Durch diesen Punkt E_1^* geht auch die Einheitsgerade. Da ferner für diesen Punkt auch $g_1 = 0$ ist, so geht auch die Gerade

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0 \tag{5}$$

durch diesen Punkt. Die Symmetrie dieser Gleichung sagt aber aus, dass diese Gerade auch durch die Punkte E_2^* und E_3^* gehen muss, d. h. mit der Einheitsgeraden zusammenfällt. Durch Vergleichung der konstanten Glieder in (4) und (5) finden wir

$$g_0 = \frac{g_1 + g_2 + g_3}{3}$$

und daraus

$$\alpha_0 = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \quad \beta_0 = \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3). \tag{6}$$

4. Nach diesen einleitenden Betrachtungen können nun die Transformationsformeln für Punktkoordinaten aufgestellt werden. Ein beliebiger Punkt P habe die rechtwinkligen Koordinaten x, y und die Dreieckskoordinaten $x_\alpha = p_\alpha : e_\alpha$. Es ist dann nach unsern Voraussetzungen

$$e_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha_\alpha^2 + \beta_\alpha^2}}, \quad p_\alpha = \frac{\alpha_\alpha x + \beta_\alpha y + 1}{\sqrt{\alpha_\alpha^2 + \beta_\alpha^2}}$$

und daher

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x + \beta_1 y + 1 \\ x_2 &= \alpha_2 x + \beta_2 y + 1 \\ x_3 &= \alpha_3 x + \beta_3 y + 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Diese Formeln sowie ihre Auflösungen

$$\begin{aligned} \Delta x &= a_1 \delta_1 x_1 + a_2 \delta_2 x_2 + a_3 \delta_3 x_3 \\ \Delta y &= b_1 \delta_1 x_1 + b_2 \delta_2 x_2 + b_3 \delta_3 x_3 \\ \Delta \; &= \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 \end{aligned} \tag{8}$$

vermitteln den Übergang von dem einen System zum andern.

5. Die letzte der Gleichungen (8) gibt die Bedingung an, der die **wahren** Koordinaten eines Punktes zu genügen haben. Wir benützen dieselbe zur Berechnung der wahren Koordinaten aus den Verhältniszahlen und zum homogenisieren von Gleichungen.

Diese Gleichung kann auch folgendermassen hergeleitet werden. Bezeichnet man die Höhen des Fundamentaldreiecks mit h_1, h_2, h_3, so ist

$$\triangle : \delta_\alpha = h_\alpha : e_\alpha,$$

und die Gleichung

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \triangle$$

geht über in

$$\frac{e_1}{h_1} + \frac{e_2}{h_2} + \frac{e_3}{h_3} = 1.$$

Da der Einheitspunkt eigentlich ein willkürlicher Punkt ist, so gilt diese Gleichung auch für die Abstände eines beliebigen Punktes P, d. h. es ist

$$\frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} = 1$$

oder da $p_\alpha = x_\alpha \,.\, e_\alpha$ ist,

$$\frac{e_1}{h_1} x_1 + \frac{e_2}{h_2} x_2 + \frac{e_3}{h_3} x_3 = 1. \tag{9}$$

Setzt man darin wieder

$$\frac{e_\alpha}{h_\alpha} = \frac{\delta_\alpha}{\triangle},$$

so erhält man die frühere Gleichung.

6. Setzt man in der Bedingungsgleichung für die Konstante $\triangle$ den Wert 0, so erhält man die Gleichung

$$\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 = 0. \tag{10}$$

Sie kann ihrer Herleitung gemäss durch keinen reellen, im Endlichen gelegenen Punkt befriedigt werden. Indessen zeigen die Gleichungen (8), dass für solche Verhältniskoordinaten, die der Gleichung (10) genügen, x und y unendlich werden. Es stellt somit (10) die **unendlich ferne Gerade** dar.

Diese Thatsache erkennen wir auch, wenn wir in der Bedingungsgleichung

$$\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 = \triangle$$

$x_\alpha = \varrho\, x'_\alpha$ setzen, wodurch wir

$$\delta_1\, x'_1 + \delta_2\, x'_2 + \delta_3\, x'_3 = \frac{\triangle}{\varrho}$$

erhalten, und beachten, dass, wenn der Punkt x_α ins Unendliche rückt, so dass die Verhältniskoordinaten x'_α endlich bleiben, ϱ ins Unendliche wachsen muss.

7. Mittels der angegebenen Transformationsformeln ist es nun möglich, jede Formel in rechtwinkligen Koordinaten auf Dreieckskoordinaten zu übertragen. Man hat z. B. für die Distanz d zweier Punkte (x, y) und (x', y'), deren genaue Dreieckskoordinaten x_α und y_α sind,

$$d^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2,$$

oder

$$\begin{aligned}\triangle^2 d^2 = {} & [a_1\, \delta_1\, (y_1 - x_1) + a_2\, \delta_2\, (y_2 - x_2) + a_3\, \delta_3\, (y_3 - x_3)]^2 \\ & + [b_1\, \delta_1\, (y_1 - x_1) + b_2\, \delta_2\, (y_2 - x_2) + b_3\, \delta_3\, (y_3 - x_3)]^2.\end{aligned}$$

Bei der Entwicklung dieses Ausdrucks beachte man, dass

$$a_\alpha^2 + b_\alpha^2 = \overline{AE}^2 = d_\alpha^2$$

und, wenn man $A_\alpha\, A_\beta = d_{\alpha\beta}$ setzt,

$$2\,(a_\alpha\, a_\beta + b_\alpha\, b_\beta) = d_\alpha^2 + d_\beta^2 - d_{\alpha\beta}^2$$

ist. Zufolge der Bedingungsgleichung der Punktkoordinaten ist dann der mit d_α^2 multiplizierte Teil gleich Null, so dass die endgültige Distanzformel lautet

$$\begin{aligned}-\triangle^2 d^2 = {} & d_{23}^2\, \delta_2\, \delta_3\, (y_2 - x_2)\,(y_3 - x_3) \\ & + d_{31}^2\, \delta_3\, \delta_1\, (y_3 - x_3)\,(y_1 - x_1) + d_{12}^2\, \delta_1\, \delta_2\, (y_1 - x_1)\,(y_2 - x_2).\end{aligned} \tag{11}$$

(In Salmon-Fiedler, „Kegelschnitte", wird diese Formel in Art. 71 unter der Voraussetzung abgeleitet, dass der Einheitspunkt mit dem Mittelpunkt des dem Fundamentaldreiecke eingeschriebenen Kreises zusammenfalle.)

8. Der doppelte Flächeninhalt D eines Dreiecks ist bekanntlich

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix},$$

wenn (x, y), (x', y') und (x'', y'') die Koordinaten der drei Ecken sind. Diese Formel transformiert sich in

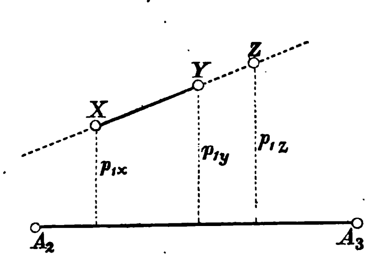
$$\triangle^3 D = \begin{vmatrix} a_1\delta_1 x_1 + a_2\delta_2 x_2 + a_3\delta_3 x_3, & b_1\delta_1 x_1 + b_2\delta_2 x_2 + \cdot, & \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \cdot \\ a_1\delta_1 x_1' + a_2\delta_2 x_2' + a_3\delta_3 x_3', & b_1\delta_1 x_1' + b_2\delta_2 x_2' + \cdot, & \delta_1 x_1' + \delta_2 x_2' + \cdot \\ a_1\delta_1 x_1'' + a_2\delta_2 x_2'' + a_3\delta_3 x_3'', & b_1\delta_1 x_1'' + b_2\delta_2 x_2'' + \cdot, & \delta_1 x_1'' + \delta_2 x_2'' + \cdot \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\,\delta_1 & a_2\,\delta_2 & a_3\,\delta_3 \\ b_1\,\delta_1 & b_2\,\delta_2 & b_3\,\delta_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix}.$$

und damit in

$$\frac{D}{\triangle} = \frac{e_1\,e_2\,e_3}{h_1\,h_2\,h_3} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix}. \tag{12}$$

9. Teilt der Punkt Z die Strecke XY nach dem Teilverhältnis λ, so hat man unmittelbar



$$\lambda = \frac{XZ}{YZ} = \frac{p_{\alpha z} - p_{\alpha x}}{p_{\alpha z} - p_{\alpha y}},$$

oder mit e_α reduziert

$$\lambda = \frac{z_\alpha - x_\alpha}{z_\alpha - y_\alpha}, \tag{13}$$

woraus

$$z_\alpha = \frac{x_\alpha - \lambda y_\alpha}{1 - \lambda}. \tag{14}$$

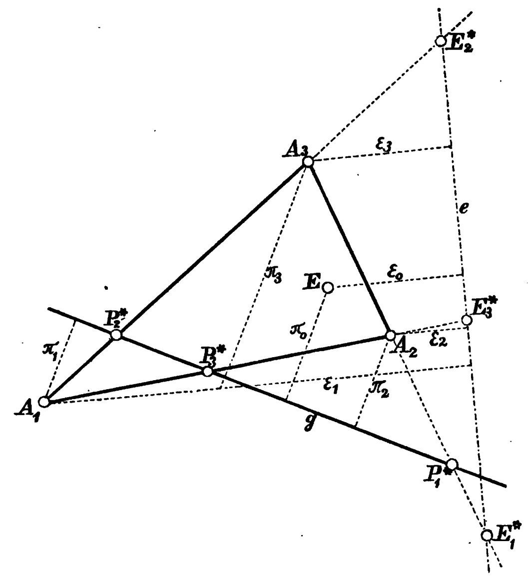
Diese Formel, welche in gleicher Weise für rechtwinklige Koordinaten gilt, bleibt demnach auch für allgemeine Dreieckskoordinaten gültig.

B. Linienkoordinaten.

10. Eine Gerade g habe die Plücker'schen Linienkoordinaten ξ, η und die Dreieckskoordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3. Die letzteren sind definiert durch

$$\xi_\alpha = \pi_\alpha : \varepsilon_\alpha,$$

wo die π_α und ε_α die Abstände der Geraden g und der Einheits-



geraden e von den Ecken A_α des Fundamentaldreiecks sind. Dabei rechnet man solche π_α und ε_α als mit dem gleichen, aber willkürlichen Vorzeichen versehen, welche auf die gleiche Seite der Geraden g oder e gehen. Es sind somit die ξ_α bis auf ein gemeinschaftliches Vorzeichen bestimmte Grössen. Es kann daher die Bedingungsgleichung der ξ_α nur Glieder gerader Dimension enthalten.

Es ist dann bekanntlich

$$\xi_2 : \xi_3 = (A_3\, A_2\, E_1^*\, P_1^*),$$
$$\xi_3 : \xi_1 = (A_1\, A_3\, E_2^*\, P_2^*),$$
$$\xi_1 : \xi_2 = (A_2\, A_1\, E_3^*\, P_3^*),$$

wo E_1^*, E_2^*, E_3^* und P_1^*, P_2^*, P_3^* die Schnittpunkte der Geraden e und g mit den Seiten des Fundamentaldreiecks sind. Diese Gleichungen zeigen, dass zur Bestimmung der Geraden g die Verhältnisse der ξ_α ausreichen, während für die metrischen Formeln stets die genauen durch $\xi_\alpha = \pi_\alpha : \varepsilon_\alpha$ definierten Koordinaten gebraucht werden.

11. Bezeichnen wir die Abstände der Geraden g und e vom Einheitspunkt mit π_0 und ε_0, so ist

$$\pi_0 = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}}; \tag{15}$$

ferner

$$\pi_\alpha = \pi_0\,(\xi\, a_\alpha + \eta\, b_\alpha + 1), \tag{16}$$
$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_0\,(\alpha_0\, a_\alpha + \beta_0\, b_\alpha + 1). \tag{17}$$

Da nun nach (6)

$$3\,\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad 3\,\beta_0 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3,$$

so folgt aus (17)

$$3\,\varepsilon_a : \varepsilon_0 = (a_a \alpha_1 + b_a \beta_1 + 1) + (a_a \alpha_2 + b_a \beta_2 + 1) + (a_a \alpha_3 + b_a \beta_3 + 1)$$
$$= \triangle : \delta_a = h_a : e_a,$$

d. h. es ist

$$3\,\varepsilon_a\,\delta_a = \varepsilon_0\,\triangle \tag{18}$$

oder auch

$$\frac{1}{\varepsilon_a} = \frac{3}{\varepsilon_0}\cdot\frac{e_a}{h_a} = \frac{3}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\delta_a}{\triangle}. \tag{19}$$

Aus der letzten Formel folgt noch

$$\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3} = \frac{3}{\varepsilon_0},$$

welche Formel einen bekannten Satz enthält.

12. Weiter folgt aus den Formeln des vorigen Artikels

$$\left(\frac{3}{\varepsilon_0}\right)^2 = 9\,(\alpha_0^2 + \beta_0^2) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)^2,$$

und da nun

$$\alpha_a^2 + \beta_a^2 = \frac{1}{e_a^2},\quad \alpha_2\,\alpha_3 + \beta_2\,\beta_3 = -\frac{1}{e_2\,e_3}\cos A_1$$

ist, so geht diese Formel über in

$$\left(\frac{3}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} + \frac{1}{e_3^2} - \frac{2}{e_2\,e_3}\cos A_1 - \frac{2}{e_3\,e_1}\cos A_2 - \frac{2}{e_1\,e_2}\cos A_3. \tag{20}$$

Damit ist ε_0 aus den Dimensionen des Dreiecks und der Lage des Einheitspunktes berechenbar. Die ε_a sind dann nach (18) oder (19) bestimmbar.

Ist E der Schwerpunkt des Dreiecks, so ist die Harmonikale die unendlich ferne Gerade und daher verschwindet die linke Seite der letzten Gleichung. Ersetzt man in diesem Falle die e_a durch ihre dreifachen Werte, d. h. durch die Höhen des Dreiecks, so erhält man die folgende für jedes Dreieck gültige Formel

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} - \frac{2}{h_2\,h_3}\cos A_1 - \frac{2}{h_3\,h_1}\cos A_2 - \frac{2}{h_1\,h_2}\cos A_3 = 0.$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann dadurch kontrolliert werden, dass man $1 : h_1 = d_{23} : \triangle$ u. s. w. setzt.

13. Für die Koordinaten einer Geraden erhält man nun

$$\xi_\alpha = \frac{\pi_0}{\varepsilon_\alpha}(a_\alpha \xi + b_\alpha \eta + 1). \tag{21}$$

Dabei ist aber zu bemerken, dass π_0 keine Konstante ist, sondern sich von Gerade zu Gerade ändert.

Für die unendlich ferne Gerade ($\xi = 0$, $\eta = 0$) erhalten wir aus (21) die unendlich grossen Koordinaten $\pi_0 : \varepsilon_\alpha$, wofür wir die endlichen Verhältniskoordinaten $\frac{1}{\varepsilon_\alpha}$, oder nach (19) auch δ_α setzen dürfen. Dies steht mit der Thatsache, dass

$$\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 = 0$$

die unendlich ferne Gerade darstellt, im Einklang.

Wir erkennen, dass die obigen Transformationsformeln für die durch den Einheitspunkt gehenden Linien nicht anwendbar sind, da ja ξ und η unendlich, π_0 aber Null wird. Wir kommen auf diese Linien in Art. 21 zurück.

Durch Auflösung der Gleichungen (21) erhält man, π_0 wie eine Konstante behandelt,

$$\begin{aligned} \frac{3\pi_0}{\varepsilon_0} \cdot \xi &= \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3, \\ \frac{3\pi_0}{\varepsilon_0} \cdot \eta &= \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \beta_3 \xi_3, \\ \frac{3\pi_0}{\varepsilon_0} \cdot 1 &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \end{aligned} \tag{22}$$

Die letzte dieser Gleichungen zeigt nun, wie π_0 auch statt aus ξ und η aus ξ_1, ξ_2, ξ_3 berechnet werden kann.

Hier stellt die Gleichung

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0,$$

weil $\xi = \eta = \infty$ werden, oder weil $\pi_0 = 0$ wird, den Einheitspunkt dar, wie auch daraus geschlossen werden kann, dass die Koeffizienten dieser Gleichung (1, 1, 1) sind.

14. Bei den Punktkoordinaten giebt die Gleichung, welche der letzten der Gleichungen (22) entspricht, die Bedingung an, der die wahren Koordinaten eines Punktes zu genügen haben. Bei den Formeln (22) hat die dritte nicht die entsprechende Bedeutung, da π_0, wie schon bemerkt, nicht konstant ist. Es ist daher zunächst

die Aufgabe zu lösen, die nicht homogene Gleichung abzuleiten, der die ξ_a zu genügen haben.

Quadriert und addiert man die beiden ersten Gleichungen von (22), so findet man, da $\pi_0^2(\xi^2+\eta^2)=1$ ist,

$$\left(\frac{3}{\varepsilon_0}\right)^2 = (\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3)^2+(\beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2+\beta_3\xi_3)^2$$

oder mittels der Formeln in Art. 12

$$\left(\frac{3}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{\xi_1^2}{e_1^2}+\frac{\xi_2^2}{e_2^2}+\frac{\xi_3^2}{e_3^2}-2\frac{\xi_2\xi_3}{e_2e_3}\cos A_1-2\frac{\xi_3\xi_1}{e_3e_1}\cos A_2$$
$$-2\frac{\xi_1\xi_2}{e_1e_2}\cos A_3. \qquad (23)$$

Dies ist die gesuchte Bedingungsgleichung der ξ_a; sie enthält in der That, wie früher als notwendig erkannt wurde, nur Glieder gerader Dimension.

Gleichung (20) ist nur ein spezieller Fall von (23), den man erhält, wenn man die letzte Gleichung auf die Einheitsgerade anwendet.

15. Was bedeutet nun die Gleichung (23), wenn man ihre linke Seite durch Null ersetzt?

Nach der Entwicklung dieser Gleichung müssen dann, insofern man sich zunächst auf reelle Lösungen beschränkt, die Ausdrücke $\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3$ und $\beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2+\beta_3\xi_3$ und damit auch ξ und η Null sein, was der unendlich fernen Geraden entspricht. Dass deren Koordinaten der Gleichung

$$0=\frac{\xi_1^2}{e_1^2}+\frac{\xi_2^2}{e_2^2}+\cdot-2\frac{\xi_2\xi_3}{e_2e_3}\cos A_1-2\frac{\xi_3\xi_1}{e_3e_1}\cos A_2-\cdot \qquad (24)$$

genügen, erkennen wir auch folgendermassen. Setzen wir in der Bedingungsgleichung (23) $\xi_a=\varrho\,\xi'_a$, sodass die ξ'_a die Proportionalkoordinaten einer Geraden sind, so stellt sich ϱ^2 als Divisor der linken Seite ein. Rückt diese Gerade ins Unendliche, so können wir annehmen, dass die ξ'_a sich den δ_a nähern, während ϱ ins Unendliche wächst. Es ist daher

$$0=\frac{\delta_1^2}{e_1^2}+\frac{\delta_2^2}{e_2^2}+\cdot-2\frac{\delta_2\delta_3}{e_2e_3}\cos A_1-2\frac{\delta_3\delta_1}{e_3e_1}\cos A_2-\cdot. \qquad (25)$$

Da $\delta_1:e_1=d_{23}$, $\delta_2:e_2=d_{31}$, $\delta_3:e_3=d_{12}$ ist, so kann die letzte Gleichung auch in der Form geschrieben werden

$$0=d_{23}^2+d_{31}^2+\cdot-2\,d_{12}\,d_{13}\cos A_1-2\,d_{21}\,d_{23}\cos A_2-\cdot,$$

in welcher ihre Richtigkeit evident ist.

Die unendlich ferne Gerade ist die einzige reelle Lösung der Gleichung (24); allein diese Gleichung besitzt unendlich viele Lösungen, Gerade, welche einen Kegelschnitt umhüllen, der aber, wie wir gleich sehen werden, in ein imaginäres Punktepaar zerfällt.

Der mit dem Radius r um den Einheitspunkt geschlagene Kreis hat die Gleichung

$$r^2 = x^2 + y^2$$

oder transformiert

$$(\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \cdot)^2 r^2 = (a_1 \delta_1 x_1 + a_2 \delta_2 x_2 + \cdot)^2 + (b_1 \delta_1 x_1 + \cdot\cdot)^2.$$

Schneidet man diesen Kreis mit der unendlich fernen Geraden

$$\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 = 0,$$

so erhält man

$$0 = (a_1 \delta_1 x_1 + a_2 \delta_2 x_2 + \cdot)^2 + (b_1 \delta_1 x_1 + b_2 \delta_2 x_2 + \cdot)^2,$$

welche Gleichung die beiden Geraden

$$0 = (a_1 + b_1 i)\,\delta_1 x_1 + (a_2 + b_2 i)\,\delta_2 x_2 + (a_3 + b_3 i)\,\delta_3 x_3,$$
$$0 = (a_1 - b_1 i)\,\delta_1 x_1 + (a_2 - b_2 i)\,\delta_2 x_2 + (a_3 - b_3 i)\,\delta_3 x_3$$

darstellt. Es sind dies auch diejenigen Geraden, in welche der Kreis $r = 0$ zerfällt. Der eine absolute Kreispunkt J_1 hat demnach Koordinaten, welche den Gleichungen

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1 i)\,\delta_1 x_1 + (a_2 + b_2 i)\,\delta_2 x_2 + (a_3 + b_3 i)\,\delta_3 x_3 &= 0\\ \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 &= 0\end{aligned}$$

genügen. Aus diesen folgt für die Koordinaten von J_1

$$j_1 : j_2 : j_3 = \frac{(a_2 - a_3) + (b_2 - b_3)\,i}{\delta_1} : \frac{(a_3 - a_1) + (b_3 - b_1)\,i}{\delta_2} : \frac{(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\,i}{\delta_3}$$

Die Verhältniskoordinaten von J_2 (j'_1, j'_2, j'_3) ergeben sich daraus durch Vertauschung von $+i$ mit $-i$.

Die Punkte J_1 und J_2 haben nun in Linienkoordinaten die Gleichungen

$$j_1 \xi_1 + j_2 \xi_2 + j_3 \xi_3 = 0,$$
$$j'_1 \xi_1 + j'_2 \xi_2 + j'_3 \xi_3 = 0.$$

Beide Punkte werden gleichzeitig dargestellt durch die reelle Gleichung

$$j_1 j'_1 \cdot \xi_1^2 + j_2 j'_2 \cdot \xi_2^2 + \cdot + (j_2 j'_3 + j_3 j'_2)\,\xi_2 \xi_3 + \cdot\cdot = 0.$$

Nun ist aber

$$j_1 j_1' = \frac{1}{\delta_1^2}[(a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3)^2] = \frac{1}{e_1^2},$$

$$j_2 j_3' + j_3 j_2' = -\frac{2}{\delta_2 \delta_3}[(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) + (b_2 - b_1)(b_3 - b_1)]$$
$$= -\frac{2}{e_2 e_3}\cos A_1.$$

Setzt man diese Werte in die obige Gleichung ein, so erhält man die Gleichung, deren Bedeutung wir gesucht haben. Ersetzt man in der Bedingungsgleichung der ξ_α das konstante Glied durch Null, so erhält man die Gleichung der absoluten Kreispunkte.

16. Sind (ξ, η) und (ξ', η') oder ξ_α und η_α zwei Linien, so hat man für den Winkel φ derselben

$$\cos\varphi = \frac{\xi\xi' + \eta\eta'}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\cdot\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}$$
$$= \pi_0 \pi_0' (\xi\xi' + \eta\eta')$$

oder mittels unserer Transformationsformeln

$$\frac{9}{\varepsilon_0^2}\cos\varphi = (\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3)(\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2 + \alpha_3\eta_3)$$
$$+ (\beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3)(\beta_1\eta_1 + \beta_2\eta_2 + \beta_3\eta_3).$$

Benützt man bei der Entwicklung wieder die Formeln des Art. 12, so ergiebt sich die Gleichung

$$\left(\frac{3}{\varepsilon_0}\right)^2\cos\varphi = \frac{\xi_1\eta_1}{e_1^2} + \frac{\xi_2\eta_2}{e_2^2} + \frac{\xi_3\eta_3}{e_3^2} - \frac{\xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2}{e_2 e_3}\cos A_1$$
$$- \frac{\xi_3\eta_1 + \xi_1\eta_3}{e_3 e_1}\cos A_2 - \frac{\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1}{e_1 e_2}\cos A_3 \qquad (26)$$

Fallen die beiden Linien zusammen, wobei die ξ_α und η_α auch dem Vorzeichen nach übereinstimmen sollen*), so geht die obige Gleichung in die Bedingungsgleichung der Linienkoordinaten über.

Aus dieser Formel ergeben sich die Bedingungsgleichungen des Parallelismus:

$$\pm\left(\frac{3}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{\xi_1\eta_1}{e_1^2} + \frac{\xi_2\eta_2}{e_2^2} + \cdot - \frac{\xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2}{e_2 e_3}\cos A_1 - \cdot\cdot \qquad (27)$$

---

*) Ist dagegen $\eta_\alpha = -\xi_\alpha$, so ist $\varphi = 180^0$ zu wählen und wir gelangen zu demselben Resultat.

und der Normalität:

$$0 = \frac{\xi_1 \eta_1}{e_1^2} + \frac{\xi_2 \eta_2}{e_2^2} + \cdot - \frac{\xi_2 \eta_3 + \xi_3 \eta_2}{e_2 e_3} \cos A_1 - \cdot\cdot \quad (28)$$

(Vgl. auch Salmon-Fiedler, „Kegelschnitte" § 65.). Für den Parallelismus werden wir ein bedeutend einfacheres Kriterium erhalten, während für die Normalität, wie leicht zu sehen ist, oben die einfachste Form gefunden worden ist.

Wie Gleichung (25) aus Gleichung (23) hergeleitet wurde, so kann aus (26) die Gleichung

$$0 = \frac{\delta_1 \xi_1}{e_1^2} + \frac{\delta_2 \xi_2}{e_2^2} + \cdot - \frac{\delta_2 \xi_3 + \delta_3 \xi_2}{e_2 e_3} \cos A_1 - \cdot\cdot \quad (29)$$

oder

$$0 = \frac{\xi_1}{e_1} d_{23} + \frac{\xi_2}{e_2} d_{31} + \frac{\xi_3}{e_3} d_{12} - \left(\frac{\xi_2}{e_2} d_{12} + \frac{\xi_3}{e_3} d_{13}\right) \cos A_1 - \cdot\cdot$$

gefolgert werden. Da dieselbe für alle ξ_1, ξ_2, ξ_3 gelten muss, so muss sie eine Identität sein, was leicht zu kontrollieren ist.

17. Für den **Abstand** p **eines Punktes** x_a oder (x, y) **von einer Geraden** ξ_a oder (ξ, η) hat man

$$p = \frac{\xi x + \eta y + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \pi_0 (\xi x + \eta y + 1)$$

oder nach den Formeln (22) und (7)

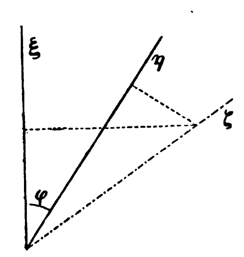
$$p = \frac{\varepsilon_0}{3} (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3). \quad (30)$$

Die Gleichung

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

sagt darnach aus, dass ein in einer Geraden gelegener Punkt von derselben den Abstand Null besitzt.

18. Der Strahl ζ_a des Büschels ξ_a, η_a hat Koordinaten, welche man in der Form schreiben kann



$$\varrho \zeta_a = \xi_a - \lambda \eta_a,$$

wobei ϱ so zu bestimmen ist, dass die ζ_a der Gleichung (23) genügen. Man findet leicht

$$\varrho^2 = 1 - 2\lambda \cos\varphi + \lambda^2,$$

so dass man

$$\zeta_a = \frac{\xi_a - \lambda \eta_a}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2}} \quad (31)$$

setzen darf.

Die Bedeutung von λ lässt sich nun folgendermassen ermitteln. Ist z_α ein Punkt der Geraden ζ_α, so ist

$$z_1 \zeta_1 + z_2 \zeta_2 + z_3 \zeta_3 = 0$$

oder also

$$z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2 + z_3 \xi_3 - \lambda (z_1 \eta_1 + z_2 \eta_2 + z_3 \eta_3) = 0,$$

woraus wir entnehmen

$$\lambda = \frac{z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2 + z_3 \xi_3}{z_1 \eta_1 + z_2 \eta_2 + z_3 \eta_3}.$$

Erweitern wir diesen Bruch mit $\frac{\varepsilon_0}{S}$, so stellen Zähler und Nenner nach (30) die Abstände des Punktes z_α von den Geraden ξ_α und η_α dar, d. h. es ist λ das Teilverhältnis*), in welchem die Gerade ζ_α den Winkel $\xi_\alpha \eta_\alpha$ oder φ teilt.

19. Der Schnittpunkt der Geraden ξ_α und η_α hat Koordinaten x_α, die sich in der Form schreiben lassen

$$\begin{aligned} x_1 &= \varrho (\xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2), \\ x_2 &= \varrho (\xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3), \\ x_3 &= \varrho (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1). \end{aligned}$$

Da nun die x_α der Gleichung

$$\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 = \triangle$$

genügen müssen, so findet man für ϱ die Gleichung

$$\triangle = \varrho \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} = \varrho\, (\delta\, \xi\, \eta)$$

und es sind demnach die wahren Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden ξ_α und η_α

$$x_1 = \frac{\triangle (\xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2)}{(\delta\, \xi\, \eta)}, \quad x_2 = \frac{\triangle (\xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3)}{(\delta\, \xi\, \eta)}, \quad x_3 = \frac{\triangle (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)}{(\delta\, \xi\, \eta)} \quad (32)$$

20. Wenn die gegebenen Geraden parallel sind, so müssen die x_α unendlich gross werden, und wir erhalten demnach als Bedingung für den Parallelismus der Geraden ξ_α und η_α die einfache Gleichung

$$\begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (33)$$

*) Clebsch-Lindemann: Abstandsverhältnis.

welche nichts anderes aussagt, als dass die Geraden ξ_a und η_a sich auf der unendlich fernen Geraden schneiden. Diese Bedingung können wir noch weiter vereinfachen. Aus der Gleichung (33) schliesst man, dass die Elemente einer Zeile der Determinante die gleichen linearen, homogenen Kombinationen der beiden andern Zeilen sind. Wir wählen diese Kombination in der Form

$$\eta_a = \varrho\,(\xi_a - \mu\,\delta_a),$$

wo ϱ so zu bestimmen, dass die η_a der Bedingungsgleichung (23) genügen. Man erhält mit Rücksicht auf die Gleichungen (25) und (29)

$$\varrho^2 = 1$$

und wir können daher

$$\varrho = 1$$

setzen. Es sind somit

$$\eta_a = \xi_a - \mu\,\delta_a \tag{34}$$

die Koordinaten einer Geraden, welche der Geraden ξ_a parallel ist.

Der Parameter μ wird bis auf einen konstanten Faktor mit dem Abstand p der beiden Parallelen übereinstimmen. Legen wir nämlich die Parallele η_a durch den willkürlichen Punkt x_a, so muss

$$\eta_1\,x_1 + \eta_2\,x_2 + \eta_3\,x_3 = 0$$

sein und es wird

$$\mu = \frac{x_1\,\xi_1 + x_2\,\xi_2 + x_3\,\xi_3}{\triangle} = \frac{3\,p}{\varepsilon_0\,\triangle}.$$

Die Formel (34) geht daher über in

$$\eta_a = \xi_a - \frac{3}{\varepsilon_0}\,p \cdot \frac{\delta_a}{\triangle}. \tag{35}$$

21. Es ist bei den Transformationsformeln der Linienkoordinaten bereits hervorgehoben worden, dass dieselben für **die durch den Einheitspunkt gehenden Geraden** illusorisch werden, einerseits weil solche Linien durch ξ und η nicht bestimmt werden können, anderseits weil $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$ wird. Es könnte daher fraglich erscheinen, ob die durch Transformation abgeleiteten Resultate auch für die Geraden des Einheitspunktes gelten. Zwar folgt schon aus Stetigkeitsbetrachtungen, dass diese Frage bejahend zu beantworten ist; allein wir können dies auch folgendermassen einsehen.

Für zwei beliebige Gerade ξ_α und η_α gilt die Formel (26). Verschieben wir die beiden Linien parallel und gebrauchen demnach die Formeln

$$\xi_\alpha^* = \xi_\alpha - \lambda \delta_\alpha$$
$$\eta_\alpha^* = \eta_\alpha - \mu \delta_\alpha ,$$

so geht die Formel (26) zufolge der Gleichungen (25) und (29) über in

$$\left(\frac{3}{\varepsilon_0}\right)^2 \cos \varphi = \frac{\xi_1^* \eta_1^*}{e_1^2} + \cdots - \frac{\xi_2^* \eta_3^* + \xi_3^* \eta_2^*}{e_2 e_3} \cos A_1 - \cdots.$$

Es gilt somit die gleiche Formel für die parallel verschobenen Geraden, wie ja geometrisch evident. Es macht dabei auch nichts aus, wenn die Grössen λ und μ so bestimmt werden, dass die eine der beiden Geraden ξ_α^* und η_α^* oder beide durch den Einheitspunkt gehen. — Wenn aber die Formel (26) auch für die durch den Einheitspunkt gehenden Geraden gilt, so ist das gleiche zu sagen von allen daraus abgeleiteten Formeln, namentlich von der Bedingungsgleichung der ξ_α, von den Bedingungen der Normalität und des Parallelismus. In gleicher Weise überzeugt man sich von der Allgemeingültigkeit der Formel (30).

Soll nun aber für eine Gerade des Einheitspunktes die Transformation wirklich durchgeführt werden, so können wir folgendermassen verfahren. Für die x-Axe ist

$$\pi_1 = b_1, \ \pi_2 = b_2, \ \pi_3 = b_3$$

und daher

$$\xi_\alpha = \frac{b_\alpha}{\varepsilon_\alpha} = \frac{3\, b_\alpha \delta_\alpha}{\varepsilon_0 \triangle}.$$

Es sind demnach die genauen Koordinaten der x-Axe

$$b_1 \delta_1 \quad , \quad b_2 \delta_2 \quad , \quad b_3 \delta_3 \quad \Big\| \cdot \frac{3}{\varepsilon_0 \triangle}$$

und der y-Axe

$$a_1 \delta_1 \quad , \quad a_2 \delta_2 \quad , \quad a_3 \delta_3 \quad \Big\| \cdot \frac{3}{\varepsilon_0 \triangle}$$

Für diese beiden Linien kennen wir somit bereits die Dreieckskoordinaten. Jeden andern Strahl des Einheitspunktes können wir aber dadurch festlegen, dass wir angeben, welches Teilverhältnis derselbe mit der x- und y-Axe bildet und dann können wir seine Koordinaten nach (31) berechnen. Andre Auf-

gaben dieser Art, wie z. B. die Bestimmung der Koordinaten einer Linie durch den Einheitspunkt, wenn das Doppelverhältnis bekannt ist, welches die gegebene Linie mit den Strahlen EA_1, EA_2, EA_3 bildet, übergehen wir und knüpfen nur noch an die letzten Ergebnisse einige Bemerkungen an.

22. Da die x-Axe auf der y-Axe normal steht, so muss nach (28)

$$0 = \frac{a_1 b_1 \delta_1^2}{e_1^2} + \cdots - \frac{a_2 b_3 + a_3 b_2}{e_2 e_3} \delta_2 \delta_3 \cos A_1 - \cdots$$

sein. Da ferner die Koordinaten der Axen der Gleichung (23) genügen, so ist auch

$$\triangle^2 = a_1^2 \frac{\delta_1^2}{e_1^2} + \cdots - 2 a_2 a_3 \frac{\delta_2 \delta_3}{e_2 e_3} \cos A_1 - \cdots$$

$$\triangle^2 = b_1^2 \frac{\delta_1^2}{e_1^2} + \cdots - 2 b_2 b_3 \frac{\delta_2 \delta_3}{e_2 e_3} \cos A_1 - \cdots$$

Diese Formeln können auch folgendermassen geschrieben werden

$$0 = a_1 b_1 d_{23}^2 + \cdots - (a_2 b_3 + a_3 b_2) d_{12} d_{13} \cos A_1 - \cdots \quad (36)$$

$$\triangle^2 = a_1^2 d_{23}^2 + \cdots - 2 a_2 a_3 d_{12} d_{13} \cos A_1 - \cdots \quad (37)$$

Da diese Formeln keine Daten der Lage des Einheitspunktes mehr enthalten, so drücken sie Beziehungen aus über die Abstände der Ecken eines Dreiecks von einer beliebigen Geraden oder von zwei normalen Geraden der Ebene des Dreiecks.

23. Von den zahlreichen Anwendungen, die die Formel (37) gestattet, geben wir nur die folgende.

Die Gleichung (37) giebt eine Beziehung an zwischen den Abständen der Ecken eines Dreiecks von einer Geraden, wenn die Dimensionen des Dreiecks bekannt sind. Sie giebt daher auch die Bedingung für die Radien dreier Kreise von gegebenen Mittelpunkten an, damit die Kreise eine gemeinschaftliche Tangente besitzen. Sie gestattet somit auch, die Distanz a_3 eines Punktes von den gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise von den Radien a_1 und a_2 zu berechnen, wenn die Lage des Punktes gegenüber der Centralstrecke d_{12} der beiden gegebenen Kreise genau bestimmt ist; sie giebt die Abstände von den sogenannten äussern

oder innern Tangenten, je nachdem a_1 und a_2 gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben.

24. Wählt man den Schwerpunkt des Fundamentaldreiecks zum Einheitspunkt, so geht die Einheitsgerade in die unendlich ferne Gerade über und die über Linienkoordinaten abgeleiteten Formeln werden illusorisch, da ε_1, ε_2, ε_3 und ε_0 unendlich werden. Man kann hier nun entweder die harmonische Lage zwischen Einheitspunkt und Einheitsgerade aufgeben und demgemäss im vorliegenden Falle eine beliebige im Endlichen gelegene Gerade zur Einheitsgeraden wählen (vergl. Fiedler, „Darst. Geom.“ III. Teil), oder aber man ändert die Definition der Linienkoordinaten passend ab. Das erstere bietet keine Schwierigkeiten dar; bezüglich des letzteren begnügen wir uns mit einigen Andeutungen. Da wir annehmen dürfen, dass die Grössen ε_1, ε_2, ε_3 gleich werden, wenn die Einheitsgerade ins Unendliche rückt, so wird es am einfachsten sein, wenn wir die Abstände einer beliebigen Geraden von den Ecken des Fundamentaldreieckes direkt als die Koordinaten der Geraden einführen und demgemäss setzen:

$$\xi_1 = \pi_1, \ \xi_2 = \pi_2, \ \xi_3 = \pi_3.$$

Auch diese w a h r e n Koordinaten werden einer Bedingungsgleichung genügen, doch können wir dazu nicht Gleichung (23) verwenden, da bei unendlichem ε_0 diese Gleichung homogen wird. An ihre Stelle tritt die transformierte Gleichung (37), so dass die Koordinaten der Gleichung

$$\triangle^2 = d_{23}^2\, \xi_1^2 + d_{31}^2\, \xi_2^2 + \cdot - 2\, d_{12}\, d_{13}\, \xi_2\, \xi_3 \cos A_1 - \cdot \cdot$$

genügen.

Die aus dieser speziellen Annahme entspringenden Abänderungen sind leicht abzuleiten, so dass wir diese hier übergehen können.

II.

Tetraederkoordinaten.

A. Punktkoordinaten.

25. Bekanntlich sind die allgemeinsten linearen Raumkoordinaten eines Punktes P in Bezug auf ein Tetraeder $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ definiert durch

$$x_a = p_a : e_a, \quad (a = 1, 2, 3, 4),$$

wo die p_a und e_a die Abstände des gegebenen Punktes P und des Einheitspunktes E von den Ebenen des Tetraeders sind. (Fiedler, „Darst. Geom.“ III. § 20.) Dann ist

$$\begin{aligned}
x_2 : x_3 &= (A_2\ A_3\ E_{23}\ P_{23}),\\
x_3 : x_1 &= (A_3\ A_1\ E_{31}\ P_{31}),\\
x_1 : x_2 &= (A_1\ A_2\ E_{12}\ P_{12}),\\
x_1 : x_4 &= (A_1\ A_4\ E_{14}\ P_{14}),\\
x_2 : x_4 &= (A_2\ A_4\ E_{24}\ P_{24}),\\
x_3 : x_4 &= (A_3\ A_4\ E_{34}\ P_{34}),
\end{aligned} \tag{38}$$

wo E_{ab} und P_{ab} die Projektionen der Punkte E und P auf die Kante $A_a\ A_b$ aus der gegenüberliegenden Kante sind. Drei dieser Gleichungen, in denen keiner der vier Indices fehlt, bestimmen die Lage des Punktes.

Auch hier sind die eben definierten wahren Koordinaten von den Verhältniskoordinaten zu unterscheiden, welche letztere zur Bestimmung der Lage des Punktes nach den Gleichungen (38) ausreichen. Für die Herstellung metrischer Formeln sind dagegen die wahren Koordinaten unerlässlich.

26. Auch hier verbinden wir mit dem Tetraedersystem ein rechtwinkliges System, dessen Anfangspunkt mit dem Einheitspunkt des Fundamentaltetraeders zusammenfällt. Sind dann

die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 im rechtwinkligen System bestimmt durch die Koordinaten

	x	y	z
A_1	a_1	b_1	c_1
A_2	a_2	b_2	c_2
A_3	a_3	b_3	c_3
A_4	a_4	b_4	c_4,

so stellt

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{39}$$

das positive oder negative, sechsfache Volumen des Fundamentaltetraeders dar.

27. Über das Vorzeichen des Tetraedervolumens sind hier einige Bemerkungen einzuschalten, die wir dann namentlich bei Strahlenkoordinaten zu verwerten haben. Dieses Vorzeichen kann, wie eben geschehen ist, durch eine Determinante bestimmt werden, welche ihr Zeichen wechselt, wenn zwei Zeilen und damit zwei Ecken des Tetraeders vertauscht werden. Um unabhängig vom Koordinatensystem das Vorzeichen des Volumens eines Tetraeders beurteilen zu können, stellen wir folgendes Kriterium auf. Nachdem die Reihenfolge der Ecken bestimmt ist, denkt man sich einen Beobachter so in der Kante der ersten und zweiten Ecke liegend, dass die Richtung von Fuss zu Kopf übereinstimmt mit der Richtung von der ersten Ecke nach der zweiten; dieser Beobachter muss sich dann von links nach rechts oder von rechts nach links wenden, wenn er die gegenüberliegende Kante von der dritten Ecke aus nach der vierten hin beobachten will. Wir wollen nun im ersten Falle den Inhalt positiv, im zweiten Falle negativ nehmen und denken uns in unserm Tetraeder die Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 so angeordnet, dass das Volumen desselben positiv wird, und ferner die Axen des rechtwinkligen Systems so gewählt, dass die Determinante $\triangle$ einen positiven Wert erhält.

Man erkennt leicht, dass nicht nur das obige Kriterium mit der Determinantendarstellung in Übereinstimmung steht, sondern auch, dass, wenn $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ nach Annahme positiv ist, $A_\mathfrak{a}\ A_\mathfrak{b}\ A_\mathfrak{c}\ A_\mathfrak{d}$ positiv oder negativ wird, je nachdem die Permutation $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ der Indices 1, 2, 3, 4 eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen enthält, oder, wie man auch sagt, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ eine gerade oder ungerade Permutation von 1, 2, 3, 4 ist.

Die der Ecke $A_\mathfrak{a}$ gegenüberliegende Ebene bezeichnen wir mit $\mathbf{A}_\mathfrak{a}$, die doppelte Fläche des in $\mathbf{A}_\mathfrak{a}$ gelegenen Dreiecks mit $f_\mathfrak{a}$ und die entsprechende Höhe des Fundamentaltetraeders mit $h_\mathfrak{a}$. Es sind dann $f_\mathfrak{a}$ und $h_\mathfrak{a}$ positive Zahlen, welche der Gleichung

$$\triangle = f_1\ h_1 = f_2\ h_2 = f_3\ h_3 = f_4\ h_4$$

genügen. Liegt dann der Einheitspunkt E im Innern des Tetraeders, in welchem Falle E mit $A_\mathfrak{a}$ auf gleicher Seite von $\mathbf{A}_\mathfrak{a}$ liegt, so sind sämtliche $e_\mathfrak{a}$ positiv zu nehmen. Dies ist der Normalfall, welchen wir im folgenden immer voraussetzen wollen; jeder andere Fall kann daraus leicht abgeleitet werden.

28. Es seien nun $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ die Subdeterminanten der letzten Spalte in der Determinante $\triangle$, so dass also stets

$$\triangle = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \tag{40}$$

ist, so sind auch diese vier Grössen im Normalfall positiv, da $\delta_\mathfrak{a}$ das sechsfache Volumen desjenigen Tetraeders darstellt, welches aus dem Fundamentaltetraeder dadurch entsteht, dass an Stelle der Ecke $A_\mathfrak{a}$ der Einheitspunkt tritt.

Sind nun

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &\equiv \alpha_1\ x + \beta_1\ y + \gamma_1\ z + 1 = 0 \\ \mathbf{A}_2 &\equiv \alpha_2\ x + \beta_2\ y + \gamma_2\ z + 1 = 0 \\ \mathbf{A}_3 &\equiv \alpha_3\ x + \beta_3\ y + \gamma_3\ z + 1 = 0 \\ \mathbf{A}_4 &\equiv \alpha_4\ x + \beta_4\ y + \gamma_4\ z + 1 = 0 \end{aligned} \tag{41}$$

die Gleichungen der vier Tetraederebenen, so sind bekanntlich $\alpha_\mathfrak{a}$, $\beta_\mathfrak{a}$, $\gamma_\mathfrak{a}$, 1 proportional den Subdeterminanten der $\mathfrak{a}$ten Zeile von $\triangle$ und da offenbar $\delta_\mathfrak{a}$ der Proportionalitätsfaktor ist, so ist das System der Subdeterminanten von $\triangle$ gleich

$$\begin{matrix} \alpha_1\ \delta_1 & \beta_1\ \delta_1 & \gamma_1\ \delta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2\ \delta_2 & \beta_2\ \delta_2 & \gamma_2\ \delta_2 & \delta_2 \\ \alpha_3\ \delta_3 & \beta_3\ \delta_3 & \gamma_3\ \delta_3 & \delta_3 \\ \alpha_4\ \delta_4 & \beta_4\ \delta_4 & \gamma_4\ \delta_4 & \delta_4. \end{matrix}$$

Nach einem bekannten Determinantensatze ist dann

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 1 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\Delta^3}{\delta_1\,\delta_2\,\delta_3\,\delta_4}.$$

Diese Grösse können wir noch mittels der Proportion

$$\delta_a : \Delta = e_a : h_a = \omega_a, \tag{42}$$

wo die ω_a absolute Zahlen sind, auf die Form bringen

$$\frac{\Delta^3}{\delta_1\,\delta_2\,\delta_3\,\delta_4} = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{h_1\,h_2\,h_3\,h_4}{e_1\,e_2\,e_3\,e_4} = \frac{1}{\nabla},$$

wo

$$\nabla = \Delta\,\frac{e_1\,e_2\,e_3\,e_4}{h_1\,h_2\,h_3\,h_4} = \Delta\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_3\,\omega_4 \tag{43}$$

ein im folgenden noch häufig auftretender Volumenkoeffizient ist.

29. Die Gleichung der **Einheitsebene** sei

$$\mathbf{E} \equiv \alpha_0\,x + \beta_0\,y + \gamma_0\,z + 1 = 0.$$

Wie bei Dreieckskoordinaten findet man

$$\mathbf{E} \equiv \frac{1}{4}\,(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4),$$

so dass

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{4}, \quad \beta_0 = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4}{4}, \quad \gamma_0 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{4} \tag{44}$$

ist, d. h. die Ebenenkoordinaten der Einheitsebene sind die arithmetischen Mittel der Ebenenkoordinaten der Tetraederebenen. Da die Richtung der x-Axe willkürlich ist, so können wir die letzterwähnte Thatsache auch in dem Satze ausdrücken: Sind ein Punkt E und eine Ebene $\mathbf{E}$ in Bezug auf ein Tetraeder harmonisch gelegen und ziehen wir durch E einen beliebigen Strahl, so ist der auf diesem Strahl durch die Ebene $\mathbf{E}$ erzeugte Abschnitt das harmonische Mittel der Abschnitte, die durch die Tetraederebenen auf dem Strahle erzeugt werden.

30. Es habe ein beliebiger Punkt von den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z die Tetraederkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4. Da nun

$$p_a = \frac{\alpha_a x + \beta_a y + \gamma_a z + 1}{\sqrt{\alpha_a^2 + \beta_a^2 + \gamma_a^2}}, \quad e_a = \frac{1}{\sqrt{\alpha_a^2 + \beta_a^2 + \gamma_a^2}} \tag{45}$$

ist, wobei die Quadratwurzel im Normalfall positiv zu nehmen ist, so lauten die Transformationsformeln für Punktkoordinaten einerseits

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + 1 \\ x_2 &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + 1 \\ x_3 &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + 1 \\ x_4 &= \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + 1 \end{aligned} \tag{46}$$

und anderseits

$$\begin{aligned} \triangle x &= \delta_1 a_1 x_1 + \delta_2 a_2 x_2 + \delta_3 a_3 x_3 + \delta_4 a_4 x_4 \\ \triangle y &= \delta_1 b_1 x_1 + \delta_2 b_2 x_2 + \delta_3 b_3 x_3 + \delta_4 b_4 x_4 \\ \triangle z &= \delta_1 c_1 x_1 + \delta_2 c_2 x_2 + \delta_3 c_3 x_3 + \delta_4 c_4 x_4 \\ \triangle &= \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 + \delta_4 x_4. \end{aligned} \tag{47}$$

Die letzten Gleichungen können auch in der Form geschrieben werden

$$\begin{aligned} x &= \frac{\delta_1 a_1 x_1 + \delta_2 a_2 x_2 + \delta_3 a_3 x_3 + \delta_4 a_4 x_4}{\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 + \delta_4 x_4} \\ y &= \frac{\delta_1 b_1 x_1 + \delta_2 b_2 x_2 + \delta_3 b_3 x_3 + \delta_4 b_4 x_4}{\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 + \delta_4 x_4} \\ z &= \frac{\delta_1 c_1 x_1 + \delta_2 c_2 x_2 + \delta_3 c_3 x_3 + \delta_4 c_4 x_4}{\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 + \delta_4 x_4}, \end{aligned} \tag{48}$$

in welcher sie von den wahren Tetraederkoordinaten x_a unabhängig werden.

31. Die letzte der Gleichnngen (47) giebt die Bedingung an, der die wahren Tetraederkoordinaten eines Punktes genügen. Man kann sie in den äquivalenten Formen schreiben

$$\frac{e_1}{h_1} x_1 + \frac{e_2}{h_2} x_2 + \frac{e_3}{h_3} x_3 + \frac{e_4}{h_4} x_4 = 1, \tag{49}$$

$$\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3 + \omega_4 x_4 = 1, \tag{50}$$

und

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & x_4 \end{vmatrix} = \triangle.$$

Die gleichen Schlüsse, die wir bei Dreieckskoordinaten entwickelt haben, zeigen, dass

$$\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 + \delta_4 x_4 = 0$$

oder

$$\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3 + \omega_4 x_4 = 0 \tag{51}$$

die Gleichung der **unendlich fernen Ebene** ist. Wir nennen die numerischen Grössen ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 die **wahren oder genauen** Koordinaten der unendlich fernen Ebene; sie sind im Normalfall positive echte Brüche, deren Summe 1 ist.

32. Wir wollen nun zunächst die entwickelten Transformationsformeln zur Ableitung der **Distanzformel** benützen. Die Punkte x_a und y_a mögen die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z und x', y', z' und die Distanz d haben. Es ist dann

$$d^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

und man erhält durch die Formeln (47) wie bei den Dreieckskoordinaten

$$-\Delta^2 d^2 = \sum_{ab} d_{ab}^2 \delta_a \delta_b (y_a - x_a)(y_b - x_b)$$

oder nach Division mit Δ^2

$$-d^2 = \sum_{ab} d_{ab}^2 \omega_a \omega_b (y_a - x_a)(y_b - x_b). \tag{52}$$

Dabei ist die Summe rechts über die Zahlenpaare

23, 31, 12, 14, 24, 34

zu erstrecken.

Wir bezeichnen die im folgenden noch häufig auftretende Funktion

$$d_{23}^2 \omega_2 \omega_3 u_2 u_3 + d_{31}^2 \omega_3 \omega_1 u_3 u_1 + d_{12}^2 \omega_1 \omega_2 u_1 u_2$$
$$+ d_{14}^2 \omega_1 \omega_4 u_1 u_4 + d_{24}^2 \omega_2 \omega_4 u_2 u_4 + d_{34}^2 \omega_3 \omega_4 u_3 u_4$$

abkürzend mit

$$E(u_1, u_2, u_3, u_4) \equiv E(u)$$

(Entfernung) und schreiben damit die Distanzformel in der Form

$$-d^2 = E(y - x). \tag{53}$$

33. Wenden wir diese Formel auf das Punktepaar $A_1 A_2$ an, so erhalten wir eine Identität; nicht so, wenn wir sie auf die Punkte E und A_a anwenden, deren Distanz wir mit d_a bezeichnen wollen. Definieren wir die Grössen k_a^2 und k^2 durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \quad\cdot\quad d_{12}^2\,\omega_2 + d_{13}^2\,\omega_3 + d_{14}^2\,\omega_4 \\ k_2^2 &= d_{21}^2\,\omega_1 \quad\cdot\quad + d_{23}^2\,\omega_3 + d_{24}^2\,\omega_4 \\ k_3^2 &= d_{31}^2\,\omega_1 + d_{32}^2\,\omega_2 \quad\cdot\quad + d_{34}^2\,\omega_4 \\ k_4^2 &= d_{41}^2\,\omega_1 + d_{42}^2\,\omega_2 + d_{43}^2\,\omega_3 \quad\cdot \end{aligned} \tag{54}$$

$$k^2 = \sum_{ab} d_{ab}^2\,\omega_a\,\omega_b, \tag{55}$$

so ist

$$2k^2 = \omega_1 k_1^2 + \omega_2 k_2^2 + \omega_3 k_3^2 + \omega_4 k_4^2 \tag{56}$$

und die Distanzformel ergiebt aus der Koordinatentabelle

$$\begin{array}{c} E \\ A_1 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1\ , & 1\ , & 1\ , & 1 \\ \frac{h_1}{e_1} = \frac{1}{\omega_1}\ , & 0\ , & 0\ , & 0 \end{array} \right\|$$

die Gleichung

$$-\,d_1^2 = k^2 - k_1^2.$$

Es ist somit

$$\begin{aligned} d_1^2 &= k_1^2 - k^2 \\ d_2^2 &= k_2^2 - k^2 \\ d_3^2 &= k_3^2 - k^2 \\ d_4^2 &= k_4^2 - k^2 \end{aligned} \tag{57}$$

und

$$\omega_1 d_1^2 + \omega_2 d_2^2 + \omega_3 d_3^2 + \omega_4 d_4^2 = k^2. \tag{58}$$

Damit sind die Grössen d_a aus den Dimensionen des Tetraeders und der Lage des Einheitspunktes berechnet.

Die Grössen k^2, k_a^2 sind im Normalfall nach ihrer Definition positive Grössen und können als Quadrate von Strecken aufgefasst werden. Beschreibt man um den Einheitspunkt eine Kugel vom Radius k, so sind k_1, k_2, k_3, k_4 die Radien derjenigen Kugeln, die die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 zu Mittelpunkten haben und die erste Kugel in Hauptkreisen schneiden.

Die Kugel k kann folgendermassen konstruiert werden. Aus der Gleichung (55) folgt

$$k^2 = \sum_{ab} d_{ab}\,\frac{e_a}{h_a}\cdot d_{ab}\,\frac{e_b}{h_b}\,.$$

Zieht man daher durch den Einheitspunkt eine Gerade parallel zu der Kante $A_1 A_2$, so schneidet dieselbe die Flächen $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ in den Punkten B_1 und B_2; nimmt man dann von $B_1 E$ und $B_2 E$ das geometrische Mittel, führt dies auch in Bezug auf die andern

Kanten aus und addiert die sechs entsprechenden Mittel geometrisch unter rechten Winkeln, so stellt die Summe den Radius der Kugel k dar.

34. Als zweite Anwendung der Transformationsformeln berechnen wir das Volumen eines Tetraeders. Bezeichnen wir das sechsfache Volumen mit V, so ist bekanntlich

$$V = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix}$$

und man erhält mittels der Formeln (47) und des Multiplikationstheorems der Determinanten

$$V = \nabla \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix}, \tag{59}$$

wobei ∇ der in Art. 28 definierte Volumenkoeffizient ist.

35. Zu weitern Resultaten gelangen wir durch die folgenden Betrachtungen.

Es seien X und Y zwei Punkte mit den genauen Koordinaten x_α und y_α; dann stellen bekanntlich in den Formeln

$$\varrho\, z_\alpha = x_\alpha - \lambda\, y_\alpha$$

die z_α die Koordinaten eines Punktes Z der Geraden XY dar. Dabei ist links ein Proportionalitätsfaktor ϱ hinzugefügt worden, der so zu bestimmen ist, dass die z_α die wahren Koordinaten des Punktes Z werden. Es folgt aus der Gleichung

$$1 = \omega_1 z_1 + \omega_2 z_2 + \omega_3 z_3 + \omega_4 z_4$$

leicht

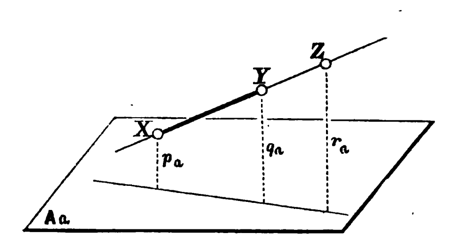
$$\varrho = 1 - \lambda,$$

so dass

$$z_\alpha = \frac{x_\alpha - \lambda\, y_\alpha}{1 - \lambda}. \tag{60}$$

Diese Formel stimmt genau mit der entsprechenden in rechtwinkligen Koordinaten überein. Es ist auch hier λ das Teilverhältnis,

in welchem die Strecke XY durch den Punkt Z geteilt wird, denn aus (60) folgt



$$\lambda = \frac{z_a - x_a}{z_a - y_a}$$

und damit nach Figur

$$\lambda = \frac{r_a : e_a - p_a : e_a}{r_a : e_a - q_a : e_a}$$
$$= \frac{r_a - p_a}{r_a - q_a} = \frac{XZ}{YZ}.$$

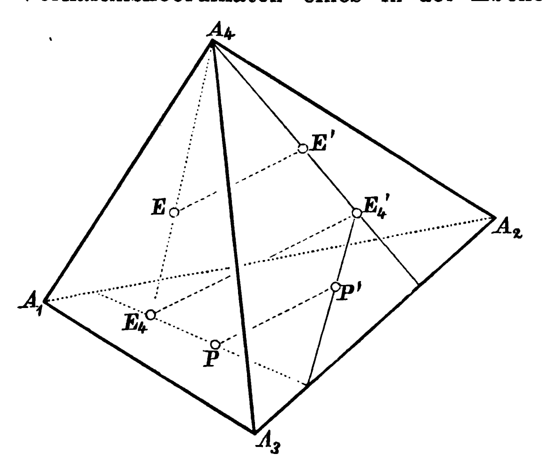
36. Wir wollen von der Formel (60) einige Anwendungen machen und zunächst die Koordinaten der Projektion eines Punktes X (x_a) aus der Ecke A_4 $\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{h_4}{e_4} = \frac{1}{\omega_4}\right)$ auf die Ebene A_4 berechnen. Ein Punkt der Linie XA_4 hat die Koordinaten

$$\frac{x_1}{1-\lambda},\ \frac{x_2}{1-\lambda},\ \frac{x_3}{1-\lambda},\ \frac{x_4 - \lambda : \omega_4}{1-\lambda},$$

und es ist λ so zu bestimmen, dass die vierte Koordinate verschwindet. Die Projektion hat somit die Koordinaten

$$\frac{x_1}{1-\omega_4 x_4},\ \frac{x_2}{1-\omega_4 x_4},\ \frac{x_3}{1-\omega_4 x_4},\ 0.$$

Dazu ist aber folgendes zu bemerken. Sind x_1', x_2', x_3', 0 die Verhältniskoordinaten eines in der Ebene A_4 gelegenen Punktes, so kann man bekanntlich die x_1', x_2', x_3' auch auffassen als die Verhältniskoordinaten dieses Punktes, bezogen auf das System A_1, A_2, A_3, E_4, wo E_4 die Projektion von E aus A_4 auf A_4 ist. Bei genauen Koordinaten können wir nicht in gleicher Weise schliessen. Es stellt sich uns



daher die Aufgabe, für einen solchen Punkt P die genauen Dreieckskoordinaten in dem erwähnten System zu berechnen. Wir bezeichnen diese Koordinaten mit x_1^*, x_2^*, x_3^* und haben dann, wenn E', E_4', P' die Normalprojektionen der Punkte E, E_4, P auf die Ebene $\mathbf{A}_1$ sind,

$$x_1 = \frac{PP'}{EE'}, \quad x_1^* = \frac{PP'}{E_4E_4'}$$

und daher

$$\frac{x_1^*}{x_1} = \frac{EE'}{E_4E_4'} = \frac{A_4E}{A_4E_4} = \frac{h_4 - e_4}{h_4} = 1 - \omega_4.$$

Analog erhält man

$$x_1^* = x_1(1 - \omega_4),\ x_2^* = x_2(1 - \omega_4),\ x_3^* = x_3(1 - \omega_4).$$

Es sind somit die Tetraederkoordinaten eines in der Ebene $\mathbf{A}_4$ gelegenen Punktes P mit

$$1 - \omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$

zu multiplizieren, damit sie in die genauen Dreieckskoordinaten in Bezug auf das System A_1, A_2, A_3, E_4 übergehen.

Verbinden wir dieses Resultat mit der letzten Aufgabe, so erhalten wir den Satz: Hat ein Punkt die genauen Tetraederkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4, so hat seine Projektion aus der Ecke A_4 auf die Ebene $\mathbf{A}_4$ im System A_1, A_2, A_3, E_4 die genauen Dreieckskoordinaten

$$\frac{1 - \omega_4}{1 - \omega_4 x_4} x_1, \quad \frac{1 - \omega_4}{1 - \omega_4 x_4} x_2, \quad \frac{1 - \omega_4}{1 - \omega_4 x_4} x_3.$$

37. Eine weitere Anwendung der Formel

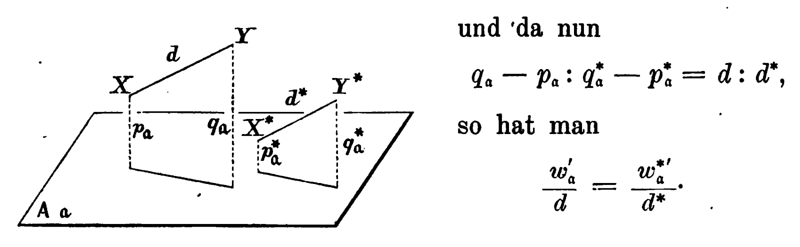
$$z_\alpha = \frac{x_\alpha - \lambda y_\alpha}{1 - \lambda}$$

ist die folgende. Der unendlich ferne Punkt der Geraden XY hat das Teilverhältnis $\lambda = 1$ und werden daher seine Koordinaten unendlich gross. Aber diese Werte verhalten sich wie die endlichen Differenzen $x_\alpha - y_\alpha$ oder $y_\alpha - x_\alpha$, die wir mit w_α' bezeichnen.

Sind die Strecken XY oder d und $X^* Y^*$ oder d^* parallel, so ist

$$w_\alpha' = y_\alpha - x_\alpha = \frac{q_\alpha - p_\alpha}{e_\alpha}$$

$$w_\alpha^{*\prime} = y_\alpha^* - x_\alpha^* = \frac{q_\alpha^* - p_\alpha^*}{e_\alpha}$$



und da nun

$$q_a - p_a : q^*_a - p^*_a = d : d^*,$$

so hat man

$$\frac{w'_a}{d} = \frac{w^{*\prime}_a}{d^*}.$$

Es ändern sich demnach die Verhältnisse der w'_a beim Übergang von einer Strecke zu einer parallelen gar nicht und die absoluten Werte der w'_a nur proportional der Distanz des die Richtung definierenden Punktepaares. Wir führen daher die w'_a als Koordinaten der betreffenden Richtung und die Werte

$$w_a = \frac{w_a'}{d} \qquad (61)$$

als die genauen Koordinaten dieser Richtung ein. Es sind dann die genauen Koordinaten einer Richtung auch gleich den Differenzen

$$w_a = y_a - x_a ,$$

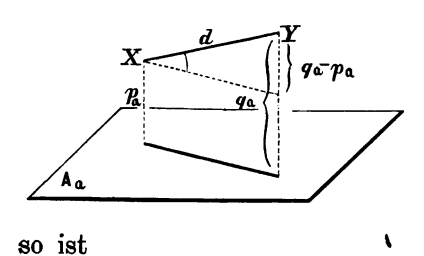
wenn die Punkte x_a und y_a die Distanz Eins haben.

Die genauen Koordinaten einer Richtung sind ihrer Herleitung gemäss nur bis auf ein gemeinschaftliches Vorzeichen bestimmt und werden daher einer quadratischen Gleichung genügen müssen. Wir erhalten diese Bedingungsgleichung, indem wir in der Distanzformel (53) $y_a - x_a = w_a$ und gleichzeitig $d = 1$ setzen, so dass

$$-1 = E(w) \qquad (62)$$

ist.

Die Frage nach der Bedeutung der Gleichung $E(w) = 0$ werden wir später beantworten.



Die Grössen w_a entsprechen den Richtungskosinus im rechtwinkligen System. Wir können die Analogie noch weiter verfolgen. Da

$$w_a = \frac{y_a - x_a}{d},$$

so ist

$$e_a\, w_a = \frac{q_a - p_a}{d}$$

und es stellt demnach $e_a w_a$ den Kosinus des Winkels dar, den die Richtung von x_a nach y_a mit der Richtung der Höhe h_a vom Fusspunkt nach der Spitze A_a bildet. Ferner folgt aus

$$w_a = \frac{y_a - x_a}{d}$$

die Formel

$$y_a = x_a + d\, w_a, \tag{63}$$

welche die Koordinaten eines Punktes angiebt, der auf dem von x_a ausgehenden Strahl von der Richtung w_a in der Entfernung d liegt.

38. Zwei Richtungen bestimmen einen Winkel φ. Zu dessen Berechnung gebrauchen wir die Funktion

$$E(u_1, u_2, u_3, u_4 \mid v_1, v_2, v_3, v_4) \equiv E(u \mid v)$$
$$\equiv \sum_{ab} d_{ab}^2\, \omega_a\, \omega_b\, (u_a v_b + u_b v_a).$$

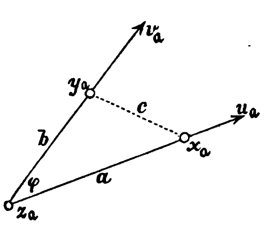
Es ist dann $E(u \mid v)$ bis auf den Faktor 2 die Polarfunktion von $E(u)$ und

$$E(u \mid u) = 2 \,.\, E(u). \tag{64}$$

Es seien nun u_a und v_a die wahren Koordinaten zweier Richtungen, welche Koordinaten den Gleichungen

$$\omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 + \omega_3 u_3 + \omega_4 u_4 = 0\,^{*)}$$
$$\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2 + \omega_3 v_3 + \omega_4 v_4 = 0$$
$$E(u) = -1, \quad E(v) = -1$$

genügen. Wir ziehen nun von dem beliebigen Punkt z_a aus zwei Strahlen von den Richtungen u_a und v_a und nehmen auf denselben in den Entfernungen a und b zwei Punkte x_a und y_a an. Dann ist nach (63)



$$x_a = z_a + a\, u_a, \quad y_a = z_a + b\, v_a,$$

und man hat für die Entfernung c der beiden Punkte x_a und y_a nach (53)

$$-c^2 = E(y - x) = E(b\,v - a\,u)$$
$$= a^2 .\, E(u) + b^2 .\, E(v) - a\,b .\, E(u \mid v),$$

*) Es ist ja $\omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 + \ldots = \omega_1 (y_1 - x_1) + \omega_2 (y_2 - x_2) + \ldots = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \ldots - (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots) = 0.$

also

$$c^2 = a^2 + b^2 + a\,b\,E(u \mid v).$$

Da nun anderseits

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos\varphi,$$

so muss

$$-2 \cos\varphi = E(u \mid v) \tag{65}$$

sein. Diese Formel löst die gestellte Aufgabe.

Fallen die beiden Richtungen zusammen, so ist $\varphi = 0$ und man erhält

$$-2 = E(u \mid u)$$

oder nach (64)

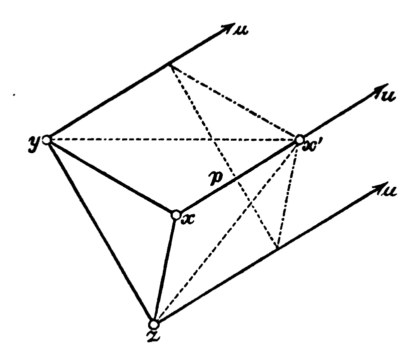
$$-1 = E(u),$$

übereinstimmend mit (62). Für $\varphi = 90^\circ$ ergiebt unsere Formel

$$0 = E(u \mid v),$$

als Bedingungsgleichung der Normalität zweier Richtungen.

39. Als eine weitere Anwendung der Richtungskoordinaten untersuchen wir die Bedeutung der Formel für das Tetraedervolumen, falls eine Ecke oder zwei oder drei Ecken ins Unendliche fallen.

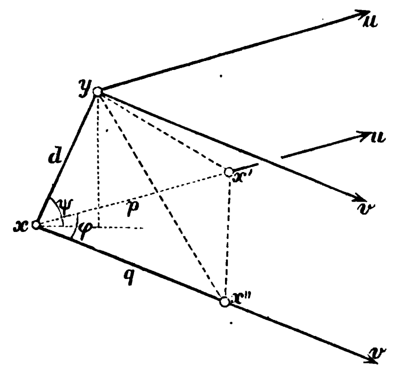


Es seien zunächst drei Punkte x_α, y_α und z_α im Endlichen und eine Richtung u_α gegeben. Dann nehmen wir auf dem durch x_α gehenden Strahl von der Richtung u_α in der Entfernung p einen Punkt x'_α an und bezeichnen das sechsfache Volumen des entstehenden Tetraeders (x, y, z, x') mit V, so dass nach (59)

$$V = \nabla \mid x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, x_\alpha + p\,u_\alpha \mid = \nabla p \mid x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, u_\alpha \mid.$$

Nun ist V auch das doppelte Volumen des in der Figur angedeuteten Prismas und daher gleich $N \cdot p$, wo N die doppelte Fläche des Normalschnittes dieses Prismas ist. Durch Vergleichung der beiden Ausdrücke findet man

$$N = \nabla \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix}. \tag{66}$$



Es seien nun zwei Punkte x_a und y_a von der Distanz d im Endlichen und zwei Punkte u_a und v_a im Unendlichen gelegen. Auf den durch x_a gehenden Strahlen von den Richtungen u_a und v_a nehmen wir in den Entfernungen p und q die Punkte x'_a und x''_a an und haben dann für das sechsfache Volumen V des Tetraeders (x, y, x', y')

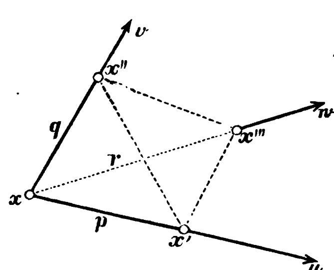
$$\begin{aligned} V &= \nabla \mid x_a,\ y_a,\ x_a + p\, u_a,\ x_a + q\, v_a \mid \\ &= \nabla\, p\, q \mid x_a,\ y_a,\ u_a,\ v_a \mid. \end{aligned}$$

Anderseits hat man

$$V = p\, q \sin \varphi \,.\, d \sin \psi = p\, q\, d \,.\, \sin (d\, u\, v),$$

wo φ und ψ die aus der Figur ersichtlichen Bedeutungen haben und $\sin (d\, u\, v)$ der von v. Staudt (Crelle J. Bd. 24, p. 252) eingeführte Sinus der Ecke ist, welche von den Richtungen d, u_a und v_a gebildet wird. Aus der Vergleichung dieser Formeln folgt:

$$d \sin (d\, u\, v) = \nabla \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix}. \tag{67}$$



Sind endlich drei Punkte im Unendlichen gelegen, so ziehen wir von dem im Endlichen gelegenen Punkte x_a drei Strahlen von den Richtungen u_a, v_a und w_a und nehmen auf denselben in den Entfernungen p, q, r die Punkte x'_a, x''_a, x'''_a an und haben dann für das entsprechende Tetraeder, dessen sechsfaches Volumen V sei, einerseits

$$V = \nabla . \mid x_\alpha,\ x_\alpha + p\, u_\alpha,\ x_\alpha + q\, v_\alpha,\ x_\alpha + r\, w_\alpha \mid$$
$$= \nabla . \ p\, q\, r\, . \mid x_\alpha,\ u_\alpha,\ v_\alpha,\ w_\alpha \mid,$$

anderseits

$$V = p\, q\, r\, . \sin\,(u\, v\, w),$$

so dass

$$\sin\,(u\, v\, w) = \nabla . \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} . \tag{68}$$

Dieser Ausdruck muss seiner Bedeutung gemäss von den Koordinaten x_α unabhängig sein. Da $\nabla = \Delta\, \omega_1\, \omega_2\, \omega_3\, \omega_4$, so können wir in der That schreiben

$$\sin\,(u\, v\, w) = \Delta \begin{vmatrix} \omega_1\, x_1 & \omega_2\, x_2 & \omega_3\, x_3 & \omega_4\, x_4 \\ \omega_1\, u_1 & \omega_2\, u_2 & \omega_3\, u_3 & \omega_4\, u_4 \\ \omega_1\, v_1 & \omega_2\, v_2 & \omega_3\, v_3 & \omega_4\, v_4 \\ \omega_1\, w_1 & \omega_2\, w_2 & \omega_3\, w_3 & \omega_4\, w_4 \end{vmatrix} .$$

Wenn wir nun zur ersten Spalte die parallelen addieren, so werden die Elemente derselben

$$1,\ 0,\ 0,\ 0$$

und wir erhalten

$$\omega_1 \sin\,(u\, v\, w) = \nabla . \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}$$

oder

$$\omega_1 \sin\,(u\, v\, w) = \nabla\,(u_2\, v_3\, w_4),$$

und analog

$$\begin{aligned} \omega_2 \sin\,(u\, v\, w) &= \nabla\,(u_1\, v_4\, w_3), \\ \omega_3 \sin\,(u\, v\, w) &= \nabla\,(u_4\, v_1\, w_2), \\ \omega_4 \sin\,(u\, v\, w) &= \nabla\,(u_3\, v_2\, w_1). \end{aligned} \tag{69}$$

Stehen z. B. die drei Richtungen aufeinander normal, so ist

$$\frac{\omega_1}{(u_2\, v_3\, w_4)} = \frac{\omega_2}{(u_1\, v_4\, w_3)} = \frac{\omega_3}{(u_4\, v_1\, w_2)} = \frac{\omega_4}{(u_3\, v_2\, w_1)} = \nabla . \tag{70}$$

B. Ebenenkoordinaten.

40. Die Einheitsebene und eine beliebige Ebene mögen von den Ecken des Fundamentaltetraeders und von dem Einheitspunkt die Abstände

$$\varepsilon_1\,,\quad \varepsilon_2\,,\quad \varepsilon_3\,,\quad \varepsilon_4\,;\quad \varepsilon_0$$

und

$$\pi_1\,,\quad \pi_2\,,\quad \pi_3\,,\quad \pi_4\,;\quad \pi_0$$

haben, und zwar nehmen wir diese Abstände mit dem gleichen Vorzeichen, wenn sie auf der gleichen Seite der betreffenden Ebene liegen. Wir können demnach im Normalfall die Grössen ε_α und ε_0 als positiv voraussetzen; die π_α und π_0 sind aber nur bis auf ein gemeinschaftliches Vorzeichen bestimmt. Dann sind

$$\xi_\alpha = \pi_\alpha : \varepsilon_\alpha$$

die projektivischen Ebenenkoordinaten der beliebigen Ebene, bezogen auf das Fundamentaltetraeder. Für die Konstruktion der Ebene aus den Koordinaten sind nur die Verhältnisse derselben notwendig; in den metrischen Formeln sind indessen stets die eben definierten genauen Koordinaten anzuwenden. Diese Koordinaten sind nach dem oben Bemerkten nur bis auf ein gemeinschaftliches Vorzeichen bestimmt, ein Umstand, auf dessen Bedeutung noch eingegangen werden soll (vergl. Art. 51).

41. Die beliebige Ebene habe nun in unserem rechtwinkligen System die Plücker'schen Ebenenkoordinaten ξ, η, ζ und daher die Gleichung

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0.$$

Beachten wir noch, dass

$$\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z + 1 = 0$$

die Gleichung der Einheitsebene ist, so finden wir, wie bei den Linienkoordinaten (Art. 11, 12 und 13) die Gleichungen

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2}}\,,\quad \pi_0 = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}\,,$$

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_0 \left(\alpha_0 a_\alpha + \beta_0 b_\alpha + \gamma_0 c_\alpha + 1\right), \tag{71}$$

$$\pi_\alpha = \pi_0 \left(\xi a_\alpha + \eta b_\alpha + \zeta c_\alpha + 1\right), \tag{72}$$

$$\varepsilon_a \, \delta_a = \frac{\varepsilon_0}{4} \cdot \triangle, \quad \frac{1}{\varepsilon_a} = \frac{4}{\varepsilon_0} \, \omega_a \, , \tag{73}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_4} = \frac{4}{\varepsilon_0} \, , \tag{74}$$

sowie die Transformationsformeln

$$\xi_a = \frac{\pi_0}{\varepsilon_a} \left(a_a \, \xi + b_a \, \eta + c_a \, \zeta + 1 \right) \tag{75}$$

und

$$\begin{aligned} 4 \, \frac{\pi_0}{\varepsilon_0} \cdot \xi &= \alpha_1 \, \xi_1 + \alpha_2 \, \xi_2 + \alpha_3 \, \xi_3 + \alpha_4 \, \xi_4 \\ 4 \, \frac{\pi_0}{\varepsilon_0} \cdot \eta &= \beta_1 \, \xi_1 + \beta_2 \, \xi_2 + \beta_3 \, \xi_3 + \beta_4 \, \xi_4 \\ 4 \, \frac{\pi_0}{\varepsilon_0} \cdot \zeta &= \gamma_1 \, \xi_1 + \gamma_2 \, \xi_2 + \gamma_3 \, \xi_3 + \gamma_4 \, \xi_4 \end{aligned} \tag{76}$$

$$4 \, \frac{\pi_0}{\varepsilon_0} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 \, . \tag{77}$$

42. Quadrieren und addieren wir die Gleichungen (76), so erhalten wir, da

$$\pi_0^2 \left(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \right) = 1$$

ist,

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0} \right)^2 = \left(\alpha_1 \, \xi_1 + \alpha_2 \, \xi_2 + \alpha_3 \, \xi_3 + \alpha_4 \, \xi_4 \right)^2$$

$$+ \left(\beta_1 \, \xi_1 + \beta_2 \, \xi_2 + \beta_3 \, \xi_3 + \beta_4 \, \xi_4 \right)^2 + \left(\gamma_1 \, \xi_1 + \gamma_2 \, \xi_2 + \gamma_3 \, \xi_3 + \gamma_4 \, \xi_4 \right)^2 . \tag{78}$$

Bei der Entwicklung dieser Formel haben wir folgendes zu beachten. Zunächst ist

$$\alpha_a^2 + \beta_a^2 + \gamma_a^2 = \frac{1}{e_a^2} \, ,$$

ferner sind

$$\alpha_a \, e_a \, , \quad \beta_a \, e_a \, , \quad \gamma_a \, e_a$$

die Richtungskosinus der Normalen von A_a, so dass, wenn wir den Winkel der Ebenen A_a und A_b, der im Innern des Tetraeders liegt, mit $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$ bezeichnen, im Normalfall

$$- \cos (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = \left(\alpha_a \, \alpha_b + \beta_a \, \beta_b + \gamma_a \, \gamma_b \right) e_a \, e_b$$

ist. Damit ergiebt die Entwicklung von (78)

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{\varepsilon_0} \right)^2 = \frac{\xi_1^2}{e_1^2} + \frac{\xi_2^2}{e_2^2} + \frac{\xi_3^2}{e_3^2} + \frac{\xi_4^2}{e_4^2} - 2 \, \frac{\xi_2 \, \xi_3}{e_2 \, e_3} \cos (23) - 2 \, \frac{\xi_3 \, \xi_1}{e_3 \, e_1} \cos (31) \\ - 2 \, \frac{\xi_1 \, \xi_2}{e_1 \, e_2} \cos (12) - 2 \, \frac{\xi_1 \, \xi_4}{e_1 \, e_4} \cos (14) - 2 \, \frac{\xi_2 \, \xi_4}{e_2 \, e_4} \cos (24) - 2 \, \frac{\xi_3 \, \xi_4}{e_3 \, e_4} \cos (34) . \end{aligned} \tag{79}$$

Dies ist die Bedingungsgleichung, der die genauen Koordinaten einer Ebene zu genügen haben.

43. Mit dieser Gleichung steht die folgende Formel in engster Beziehung. Es sei φ der Winkel der beiden Ebenen

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0,$$
$$\xi' x + \eta' y + \zeta' z + 1 = 0,$$

oder ξ_α und η_α. Dann ist

$$\cos\varphi = \pi_0 \pi_0' (\xi \xi' + \eta \eta' + \zeta \zeta')$$

oder mit Hülfe der Transformationsformeln und den Entwicklungen des letzten Artikels

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \cos\varphi = \frac{\xi_1 \eta_1}{e_1^2} + \cdots - \frac{\xi_2 \eta_3 + \xi_3 \eta_2}{e_2 e_3} \cos(23) - \cdots\cdots$$

Wir bezeichnen zur Abkürzung den häufig auftretenden Ausdruck

$$\frac{\xi_1 \eta_1}{e_1^2} + \frac{\xi_2 \eta_2}{e_2^2} + \frac{\xi_3 \eta_3}{e_3^2} + \frac{\xi_4 \eta_4}{e_4^2} - \frac{\xi_2 \eta_3 + \xi_3 \eta_2}{e_2 e_3} \cos(23)$$
$$- \frac{\xi_3 \eta_1 + \xi_1 \eta_3}{e_3 e_1} \cos(31) - \frac{\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1}{e_1 e_2} \cos(12) - \frac{\xi_1 \eta_4 + \xi_4 \eta_1}{e_1 e_4} \cos(14)$$
$$- \frac{\xi_2 \eta_4 + \xi_4 \eta_2}{e_2 e_4} \cos(24) - \frac{\xi_3 \eta_4 + \xi_4 \eta_3}{e_3 e_4} \cos(34)$$

mit

$$W(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \equiv W(\xi \mid \eta)$$

(**W**ahre Koordinaten, **W**inkelfunktion) und können damit die obige Formel schreiben

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \cos\varphi = W(\xi \mid \eta). \tag{80}$$

Fallen die beiden Ebenen ξ_α und η_α zusammen, so wird $\varphi = 0$, und wir erhalten wieder die Bedingungsgleichung der Ebenenkoordinaten in der Form

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 = W(\xi \mid \xi). \tag{79}$$

Die Bedingungen der Normalität und des Parallelismus zweier Ebenen lauten nach (80)

$$0 = W(\xi \mid \eta),$$
$$\pm \left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 = W(\xi \mid \eta),$$

wobei das doppelte Vorzeichen in Art. 51 seine Erklärung finden wird.

Die Bedeutung der Gleichung $W(\xi \mid \xi) = 0$ werden wir später erkennen.

44. Zu beachten ist, dass, wenn man bei Formel (80) die Vorzeichen der Koordinaten der einen Ebene ändert, die Formel den Nebenwinkel des früheren Winkels ergiebt. Wollen wir z. B. diese Formel auf die beiden Tetraederebenen

$$\mathsf{A}_1 \left(\frac{4}{\varepsilon_0} e_1 , \ 0, \ 0, \ 0 \right)$$

$$\mathsf{A}_2 \left(\ 0 \ , \frac{4}{\varepsilon_0} e_2, 0, \ 0 \right)$$

anwenden, so müssen wir bei der einen Ebene das Vorzeichen der nicht verschwindenden Koordinate ändern, wenn wir den Winkel (12) erhalten wollen.

Für die Neigungswinkel β_1, β_2, β_3, β_4 einer Ebene ξ_α gegen die Tetraederebenen erhält man durch Anwendung derselben Formel:

$$\begin{aligned} -\frac{4}{\varepsilon_0}\cos\beta_1 &= -\frac{\xi_1}{e_1} + \frac{\xi_2}{e_2}\cos 12 + \frac{\xi_3}{e_3}\cos 13 + \frac{\xi_4}{e_4}\cos 14 \\ -\frac{4}{\varepsilon_0}\cos\beta_2 &= \frac{\xi_1}{e_1}\cos 21 - \frac{\xi_2}{e_2} + \frac{\xi_3}{e_3}\cos 23 + \frac{\xi_4}{e_4}\cos 24 \\ -\frac{4}{\varepsilon_0}\cos\beta_3 &= \frac{\xi_1}{e_1}\cos 31 + \frac{\xi_2}{e_2}\cos 32 - \frac{\xi_3}{e_3} + \frac{\xi_4}{e_4}\cos 34 \\ -\frac{4}{\varepsilon_0}\cos\beta_4 &= \frac{\xi_1}{e_1}\cos 41 + \frac{\xi_2}{e_2}\cos 42 + \frac{\xi_3}{e_3}\cos 43 - \frac{\xi_4}{e_4}, \end{aligned} \tag{81}$$

woraus noch folgt

$$\frac{4}{\varepsilon_0} = \frac{\xi_1}{e_1}\cos\beta_1 + \frac{\xi_2}{e_2}\cos\beta_2 + \frac{\xi_3}{e_3}\cos\beta_3 + \frac{\xi_4}{e_4}\cos\beta_4. \tag{82}$$

45. Setzt man in den Gleichungen

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 = W(\xi \mid \xi), \quad \left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \cos\varphi = W(\xi \mid \eta)$$

für ξ_α die Verhältniskoordinaten ξ'_α mit dem Proportionalitätsfaktor ϱ ein, so erhält man

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{\varrho^2} = W(\xi' \mid \xi'), \quad \left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \frac{\cos\varphi}{\varrho} = W(\xi' \mid \eta).$$

Lässt man nun die Ebene ξ'_α ins Unendliche rücken, so darf man annehmen, dass die ξ'_α sich den Werten ω_α und ϱ dem Werte ∞ sich nähern und die obigen Formeln gehen über in

$$0 = W(\omega \mid \omega), \tag{83}$$

$$0 = W(\omega \mid \eta). \tag{84}$$

Es ist somit die unendlich ferne Ebene als sich selbst und zu jeder endlichen Ebene normal anzusehen.

46. Die zuletzt entwickelten Formeln zeigen uns, dass die Ebene η_α, deren Koordinaten sich aus

$$\eta_\alpha = \xi_\alpha - \mu\,\omega_\alpha \tag{85}$$

berechnen, zu der Ebene ξ_α parallel ist. In der That ist nicht nur

$$\begin{aligned} W(\xi \mid \eta) &= W(\xi \mid \xi - \mu\,\omega) \\ &= W(\xi \mid \xi) - \mu\, W(\xi \mid \omega) \\ &= \left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2, \end{aligned}$$

sondern auch

$$\begin{aligned} W(\eta \mid \eta) &= W(\xi - \mu\,\omega \mid \xi - \mu\,\omega) \\ &= W(\xi \mid \xi) - 2\mu\, W(\xi \mid \omega) + \mu^2\, W(\omega \mid \omega) \\ &= \left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2, \end{aligned}$$

welche Formeln das Behauptete beweisen.

Wir können von dieser Thatsache eine kleine Anwendung machen. Genügt die Ebene ξ_α der Gleichung $W(\xi \mid \xi) = 0$, so genügt ihr auch die Parallelebene η_α. Daraus geht hervor, dass die Lösungen der Gleichung $W(\xi \mid \xi) = 0$ Ebenen darstellen, die eine in der unendlich fernen Ebene gelegene Kurve umhüllen. In Art. 66 wird gezeigt, dass diese Kurve der absolute Kegelschnitt ist.

47. Ueber die Bedeutung von μ in (85) erhalten wir folgendermassen Aufschluss. Ist (x, y, z) oder x_α ein beliebiger Punkt und (ξ, η, ζ) oder ξ_α eine beliebige Ebene, so hat man für den **normalen Abstand** p des erstern von der letztern

$$p = \pi_0\,(x\,\xi + y\,\eta + z\,\zeta + 1)$$

oder mit Hülfe der Transformationsformeln (46) und (76)

$$p = \frac{\varepsilon_0}{4}\,(x_1\,\xi_1 + x_2\,\xi_2 + x_3\,\xi_3 + x_4\,\xi_4). \tag{86}$$

Die Gleichungen (73) und (77) sind nur spezielle Fälle dieser Formel.

48. Verwenden wir diese Formel im Beispiel des Art. 46 und nehmen in der Parallelebene η_α einen Punkt x_α an, so folgt aus

$$x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 + x_3 \eta_3 + x_4 \eta_4 = 0$$

die Beziehung

$$(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 + x_4 \xi_4) - \mu = 0,$$

d. h. es ist

$$\mu = \frac{4}{\varepsilon_0} \cdot p,$$

wo p der Abstand der beiden Parallelebenen ist. Wir schreiben demgemäss die Formel für die Parallelebene auch etwa

$$\eta_\alpha = \xi_\alpha - \frac{4}{\varepsilon_0} p \cdot \omega_\alpha. \tag{87}$$

Ist z. B. der Abstand der beiden Ebenen $\frac{\varepsilon_0}{4}$, so ist

$$\eta_\alpha = \xi_\alpha - \omega_\alpha,$$

oder

$$\xi_\alpha - \eta_\alpha = \omega_\alpha,$$

d. h.: Ist der Abstand zweier parallelen Ebenen $\frac{\varepsilon_0}{4}$, so geben die Differenzen der gleichnamigen Koordinaten derselben die genauen Koordinaten der unendlich fernen Ebene. Es entspricht diese Formel in gewisser Weise der andern

$$y_\alpha - x_\alpha = w_\alpha.$$

49. Mit der Formel (86) können wir auch die Frage nach der Bedeutung des Parameters λ in der Formel

$$\varrho \zeta_\alpha = \xi_\alpha - \lambda \eta_\alpha$$

beantworten. Ist z_α ein Punkt der Ebene ζ_α, so folgt aus

$$z_1 \zeta_1 + z_2 \zeta_2 + z_3 \zeta_3 + z_4 \zeta_4 = 0$$

die Beziehung

$$\lambda = \frac{\frac{\varepsilon_0}{4} (z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2 + z_3 \xi_3 + z_4 \xi_4)}{\frac{\varepsilon_0}{4} (z_1 \eta_1 + z_2 \eta_2 + z_3 \eta_3 + z_4 \eta_4)},$$

d. h. es ist λ das Teilverhältnis, in welchem die Ebene ζ_a den Winkel φ der Ebenen ξ_a und η_a teilt.

Der Faktor ϱ bestimmt sich aus der Gleichung

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 = W(\zeta \mid \zeta).$$

Man findet

$$\varrho^2 = 1 - 2\lambda \cos\varphi + \lambda^2,$$

so dass man

$$\zeta_a = \frac{\xi_a - \lambda\eta_a}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2}} \tag{88}$$

setzen darf.

50. Bei der Anwendung dieser Formel sind die Vorzeichen der Koordinaten ξ_a und η_a so zu wählen, dass die Formel

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \cos\varphi = W(\xi \mid \eta)$$

den Winkel φ und nicht seinen Nebenwinkel ergiebt (vgl. Art. 44). Sucht man z. B. die Koordinaten der Ebene $A_3 A_4 E$, so hat man für die beiden ursprünglichen Ebenen

$$\mathsf{A}_1 \left(\frac{4}{\varepsilon_0} e_1, \quad 0, \quad 0, \quad 0\right)$$

$$\mathsf{A}_2 \left(0, \quad -\frac{4}{\varepsilon_0} e_2, \quad 0, \quad 0\right)$$

zu nehmen. Da nun die erwähnte Ebene das Teilverhältnis $-\frac{e_1}{e_2}$ besitzt, so hat sie die genauen Koordinaten

$$\frac{\frac{4}{\varepsilon_0} e_1}{R}, \quad \frac{-\frac{4}{\varepsilon_0} e_1}{R}, \quad 0, \quad 0,$$

wo

$$R^2 = \frac{e_1^2 + 2e_1 e_2 \cos(12) + e_2^2}{e_2^2} = \frac{e_{12}^2}{e_2^2}$$

und e_{12} die Entfernung der Normalprojektionen des Einheitspunktes auf die Ebenen A_1 und A_2 ist. Die gesuchten Koordinaten sind demnach

$$\frac{4}{\varepsilon_0} \cdot \frac{e_1 e_2}{e_{12}}, \quad -\frac{4}{\varepsilon_0} \cdot \frac{e_1 e_2}{e_{12}} \quad 0, \quad 0.$$

Der Ausdruck

$$e_{12}^2 = e_1^2 + 2\, e_1\, e_2 \cos(12) + e_2^2$$

giebt uns Anlass, die Koordinaten der Fusspunkte der Normalen zu berechnen, die man vom Einheitspunkt auf die Ebene A_α fällen kann. Wir lösen diese Aufgabe, indem wir an Stelle des Einheitspunktes einen beliebigen Punkt y_α und an Stelle der Ebene A_α eine beliebige Ebene ξ_α setzen. Dazu gebrauchen wir aber einige Formeln über unser Fundamentalsystem, zu deren Herleitung wir im nächsten Abschnitt übergehen wollen.

51. Zwischen den Punktkoordinaten und den Ebenenkoordinaten besteht der charakteristische Unterschied, dass die erstern vollständig bestimmte Grössen sind, die letztern aber einen allen Koordinaten gemeinschaftlichen Zeichenwechsel gestatten. Wir können nun die Bedeutung dieses Unterschiedes angeben und die Wirkung desselben auf die verschiedenen Formeln verfolgen.

Es ist bekannt, dass man die Flächen in zwei Klassen trennt, je nachdem es möglich oder nicht möglich ist, von der einen Seite der Fläche auf die andere zu gelangen, ohne die Fläche an der betreffenden Stelle zu durchsetzen. Die erste Klasse hat man Doppelflächen genannt, während für die zweite Klasse keine besondere Bezeichnung aufgestellt wurde. Hier soll eine Fläche der ersten Art einseitig, eine Fläche der zweiten Art zweiseitig genannt werden. Die entsprechenden Begriffe sind dann auch auf andere geometrische Gebilde ausgedehnt worden, und man hat erkannt, dass der Punkt ein einseitiges, die Ebene dagegen ein zweiseitiges Gebilde ist. Damit hängt der oben angegebene Unterschied der beiden Koordinatengattungen zusammen.

Die Formel

$$p = \frac{\varepsilon_0}{4}\,(x_1\,\xi_1 + x_2\,\xi_2 + x_3\,\xi_3 + x_4\,\xi_4)$$

giebt den Abstand p des Punktes x_α von der Ebene ξ_α an und zwar infolge der stetigen Aenderung des Abstandes mit der stetigen Bewegung von x_α positiv für die Punkte auf der einen Seite, negativ für die Punkte auf der andern Seite der Ebene. Wir unterscheiden demgemäss eine positive und eine negative Seite der Ebene; ändern wir die Vorzeichen aller ξ_α,

so geht die positive Seite der Ebene in die negative über. Bei dem hier eingenommenen Standpunkt ist somit von einer Ebene mit positiver und negativer Seite diejenige Ebene zu unterscheiden, welche geometrisch mit der erstern zusammenfällt, bei welcher aber die beiden Seiten mit einander vertauscht sind; die eine Ebene hat die Koordinaten ξ_a, die andere die Koordinaten $-\xi_a$. Geben wir z. B. der Einheitsebene die Koordinaten (1, 1, 1, 1), so ist, weil wir ε_0 positiv nehmen, die positive Seite der Einheitsebene dem Einheitspunkt zugewandt. Dasselbe gilt von der Ebene $\mathbf{A}_1$ im Normalfall, sofern wir derselben die Koordinaten $\left(\frac{4}{\varepsilon_0} e_1, 0, 0, 0\right)$ erteilen.

Wenn zwei so bestimmte Ebenen geometrisch zusammenfallen, so kann dies auf zwei Arten erfolgen. Bei der vollständigen Deckung kommt die positive Seite der einen Ebene auf die positive Seite der andern Ebene zu liegen, bei der unvollständigen Deckung tritt dies nicht ein. Die Formel

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \cos\varphi = W(\xi \mid \eta) \tag{80}$$

giebt dann, wie man aus Stetigkeitsgründen schliesst, denjenigen Winkel an, den die eine Ebene beschreiben muss, um vollständig mit der andern Ebene zur Deckung zu gelangen. Wechselt man die Vorzeichen der Koordinaten der einen Ebene, so geht $\cos\varphi$ in $-\cos\varphi$ über und wir erhalten den Nebenwinkel des ersten Winkels. Fallen die beiden Ebenen zusammen, so wird

$$W(\xi \mid \eta) = \pm \left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2,$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem die beiden Ebenen vollständig oder unvollständig zusammenfallen.

Die Formel

$$\eta_a = \xi_a - \mu\,\omega_a \tag{85}$$

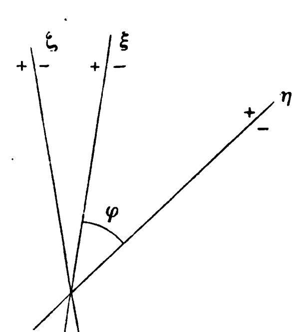
$$= \xi_a - \frac{4}{\varepsilon_0} p \cdot \omega_a \tag{87}$$

verschiebt die Ebene ξ_a parallel nach der Ebene η_a und zwar auf die positive Seite der erstern Ebene, wenn μ oder p positiv ist. Die beiden Ebenen nennen wir dann vollständig parallel; unvollständiger Parallelismus tritt ein, wenn man die Vorzeichen der Koordinaten der einen Ebene

ändert. Der Satz am Schlusse des Artikels 48 ist nun folgendermassen zu modifizieren: Ist der Abstand zweier parallelen Ebenen $\frac{\varepsilon_0}{4}$, so geben bei vollständigem Parallelismus die Differenzen, bei unvollständigem Parallelismus die Summen der gleichnamigen Koordinaten derselben die absoluten Werte der genauen Koordinaten der unendlich fernen Ebene.

Nimmt man in der Formel

$$\zeta_\alpha = \frac{\xi_\alpha - \lambda \eta_\alpha}{\sqrt{1-2\lambda\cos\varphi + \lambda^2}} \tag{88}$$



die Quadratwurzel positiv, so ergiebt sich die genaue Bestimmung der Ebene ζ_α aus dem Umstande, dass ζ_α bei verschwindendem λ mit ξ_α vollständig, oder bei unendlichem λ mit η_α vollständig oder unvollständig zusammenfällt, jenachdem λ negativ oder positiv unendlich wird.

52. Auch eine Richtung ist ein zweiseitiges Gebilde. Ist dieselbe bestimmt durch die beiden Punkte x_α und y_α von der Distanz d, so nennen wir die Richtung vom erstgenannten Punkte zum zweiten den positiven Sinn der Richtung und geben derselben die Koordinaten

$$w_\alpha = \frac{y_\alpha - x_\alpha}{d},$$

der entgegengesetzten Richtung geben wir die Koordinaten

$$-w_\alpha = \frac{x_\alpha - y_\alpha}{d}.$$

Sind aber die Koordinaten w_α einer Richtung gegeben, so bestimmen wir den positiven Sinn der Richtung folgendermassen. Nach Annahme eines beliebigen Punktes x_α und einer positiven Grösse d suchen wir den Punkt von den Koordinaten

$$y_\alpha = x_\alpha + d \cdot w_\alpha,$$

die Richtung von x_α nach y_α giebt dann den gesuchten positiven Sinn der Richtung an.

Ihrer Herleitung gemäss giebt die Formel

$$-2 \cos \varphi = E(u \mid v) \tag{65}$$

denjenigen Winkel φ an, der von den positiven (oder negativen) Richtungen $u_\mathfrak{a}$ und $v_\mathfrak{a}$ gebildet wird. Im übrigen ist von dieser Formel dasselbe zu sagen, was oben von der Formel (80) gesagt worden ist.

Bei den Degenerationsformeln des Tetraedervolumens in Artikel 39 sind ähnliche Betrachtungen hinzuzufügen. Formel (66) giebt die Fläche des Normalschnitts positiv, wenn ein im Innern des Prismas liegender Beobachter, dessen Richtung von Fuss zu Kopf mit der positiven Richtung von $u_\mathfrak{a}$ zusammenfällt, sich von links nach rechts wenden muss, wenn er die drei Punkte $x_\mathfrak{a}$, $y_\mathfrak{a}$, $z_\mathfrak{a}$ dieser Reihenfolge nach beobachten will. Endlich ergeben die Formeln (67) und (68) den Sinus der Ecke $d\,u\,v$ oder $u\,v\,w$ positiv, wenn ein in $x_\mathfrak{a}$ sich befindliches Auge, welches ins Innere der Ecke schaut, dieselbe als linkswendig erkennt.

C. Einige Formeln über das Tetraeder.

53. Wir gehen aus von der von Staudt (Crelle J. 57, p. 88) und Sylvester (Philos. Mag. 1852, II, p. 335) entwickelten Formel

$$8\,V\,V' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_{11}^2 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^2 \\ 1 & r_{21}^2 & r_{22}^2 & r_{23}^2 & r_{24}^2 \\ 1 & r_{31}^2 & r_{32}^2 & r_{33}^2 & r_{34}^2 \\ 1 & r_{41}^2 & r_{42}^2 & r_{43}^2 & r_{44}^2 \end{vmatrix}, \tag{89}$$

in welcher V und V' die sechsfachen Volumen zweier Tetraeder sind und $r_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ die Entfernung der $\mathfrak{a}^{\text{ten}}$ Ecke des ersten Tetraeders von der $\mathfrak{b}^{\text{ten}}$ Ecke des zweiten Tetraeders bedeutet. Lässt man die beiden Tetraeder mit unserem Fundamentaltetraeder zusammenfallen, so wird $r_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = r_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} = d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ und $r_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}} = 0$ und man erhält die bekannte Formel

$$8\triangle^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{90}$$

Die vierten Teile der Subdeterminanten vierten Grades von $8\triangle^2$ bezeichnen wir mit

$$\begin{matrix} D_{00} & D_{01} & D_{02} & D_{03} & D_{04} \\ D_{10} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{20} & D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{30} & D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{40} & D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{matrix} \qquad (D_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = D_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}).$$

Dann hat man nach bekannten Determinantensätzen

$$\begin{aligned} 2\triangle^2 &= \cdot + D_{01} + D_{02} + D_{03} + D_{04} \\ 2\triangle^2 &= D_{10} \quad \cdot \quad + d_{12}^2 D_{12} + d_{13}^2 D_{13} + d_{14}^2 D_{14} \\ 2\triangle^2 &= D_{20} + d_{21}^2 D_{21} \quad \cdot \quad + d_{23}^2 D_{23} + d_{24}^2 D_{24} \\ 2\triangle^2 &= D_{30} + d_{31}^2 D_{31} + d_{32}^2 D_{32} \quad \cdot \quad + d_{34}^2 D_{34} \\ 2\triangle^2 &= D_{40} + d_{41}^2 D_{41} + d_{42}^2 D_{42} + d_{43}^2 D_{43} \quad \cdot \end{aligned} \tag{91}$$

$$3\triangle^2 = \sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^{(6)} d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^2 D_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \tag{92}$$

und

$$0 = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{4} D_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3, 4) \tag{93}$$

$$0 = D_{00} + \sum_{\mathfrak{b}=1}^{4} d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^2 D_{0\mathfrak{b}} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3, 4) \tag{94}$$

$$0 = D_{\mathfrak{b}0} + \sum_{\mathfrak{c}=1}^{4} d_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}^2 D_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \qquad (\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}). \tag{95}$$

Es ist nun

$$D_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}} = -f_{\mathfrak{a}}^2, \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3, 4) \tag{96}$$

eine Gleichung, die wir auch in den Formen

$$\frac{D_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}}{\delta_{\mathfrak{a}}^2} = -\frac{1}{e_{\mathfrak{a}}^2}, \quad \frac{D_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}}{\triangle^2} = -\frac{1}{h_{\mathfrak{a}}^2} \tag{96}$$

benützen. Ferner ist

$$4\,D_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{21}^2 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Indem wir nun die letzte Spalte von der zweiten und dritten subtrahieren, dann in der entstehenden Determinante dritten Grades die letzte Zeile von der ersten und zweiten subtrahieren, erhalten wir

$$4\,D_{12} = \begin{vmatrix} d_{21}^2 - d_{24}^2 - d_{14}^2, & d_{23}^2 - d_{24}^2 - d_{34}^2 \\ d_{31}^2 - d_{34}^2 - d_{14}^2, & -2\,d_{34}^2 \end{vmatrix}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} d_{12}^2 &= d_{24}^2 + d_{41}^2 - 2\,d_{24}\,d_{41}\cos(241) \\ d_{23}^2 &= d_{34}^2 + d_{42}^2 - 2\,d_{34}\,d_{42}\cos(342) \\ d_{31}^2 &= d_{14}^2 + d_{43}^2 - 2\,d_{14}\,d_{43}\cos(143) \end{aligned}$$

und daher wird

$$\begin{aligned} D_{12} &= \begin{vmatrix} d_{24}\,d_{41}\cos(241), & d_{34}\,d_{42}\cos(342) \\ d_{34}\,d_{41}\cos(143), & d_{34}^2 \end{vmatrix} \\ &= d_{24}\,d_{41}\,d_{34}^2\,\{\cos(241) - \cos(143)\cos(342)\} \\ &= d_{24}\,d_{34}\sin(342)\cdot d_{41}\,d_{34}\sin(143)\cdot\cos(12), \end{aligned}$$

also

$$D_{12} = f_1 f_2 \cos(12).$$

Allgemeiner ist

$$D_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = f_{\mathfrak{a}} f_{\mathfrak{b}} \cos(\mathfrak{a}\mathfrak{b}), \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 1, 2, 3, 4) \tag{97}$$

eine Formel, welche mit

$$\frac{D_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{\delta_{\mathfrak{a}}\delta_{\mathfrak{b}}} = \frac{1}{e_{\mathfrak{a}}\,e_{\mathfrak{b}}}\cos(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \text{ und } \frac{D_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{\triangle^2} = \frac{1}{h_{\mathfrak{a}}\,h_{\mathfrak{b}}}\cos(\mathfrak{a}\mathfrak{b}). \tag{97}$$

identisch ist.

Mit Hülfe dieser Subdeterminanten kann die Funktion $W(\xi \mid \eta)$ in den folgenden Formen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} -W(\xi \mid \eta) &= \frac{D_{11}}{\delta_1^2}\,\xi_1\,\eta_1 + \cdots + \frac{D_{23}}{\delta_2\,\delta_3}(\xi_2\,\eta_3 + \xi_3\,\eta_2) + \cdots \\ &= \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} \frac{D_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{\delta_{\mathfrak{a}}\,\delta_{\mathfrak{b}}}\,\xi_{\mathfrak{a}}\,\eta_{\mathfrak{b}} \end{aligned} \tag{98}$$

$$
= -\frac{1}{4}\cdot\begin{vmatrix}
0 & 0 & \frac{\xi_1}{\delta_1} & \frac{\xi_2}{\delta_2} & \frac{\xi_3}{\delta_3} & \frac{\xi_4}{\delta_4} \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\frac{\eta_1}{\delta_1} & 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\
\frac{\eta_2}{\delta_2} & 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\
\frac{\eta_3}{\delta_3} & 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\
\frac{\eta_4}{\delta_4} & 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0
\end{vmatrix},
$$

in welchen die Koeffizienten, abgesehen von $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ nur noch von den Quadraten der Kantenlängen des Tetraeders abhängig sind.

54. Um noch zu einer geometrischen Interpretation der Grössen $D_{\alpha 0}$, sowie D_{00} zu gelangen, berechnen wir die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius der dem Fundamentaltetraeder umschriebenen Kugel. Die letztere Grösse kann nach einer bekannten Formel (Salmon-Fiedler, Anal. Geom. d. Raumes, I. Teil, § 57) bestimmt werden; wir ziehen aber vor, nach den hier entwickelten Resultaten zur Bestimmung dieser Kugel zu gelangen.

Der Mittelpunkt der erwähnten Kugel ist der Schnittpunkt der mittelnormalen Ebenen der Tetraederkanten. Indem wir mittels der Distanzformel ausdrücken, dass der Punkt (x_1, x_2, x_3, x_4) von den Punkten

$$
A_1\left(\frac{1}{\omega_1}, 0, 0, 0\right) \text{ und } A_2\left(0, \frac{1}{\omega_2}, 0, 0\right)
$$

gleichen Abstand hat, erhalten wir die Gleichung der mittelnormalen Ebene von $A_1 A_2$ in der Form

$$
\begin{aligned}
& d_{12}^2\,\omega_2\,x_2 + d_{13}^2\,\omega_3\,x_3 + d_{14}^2\,\omega_4\,x_4 \\
& = d_{21}^2\,\omega_1\,x_1 + d_{23}^2\,\omega_3\,x_3 + d_{24}^2\,\omega_4\,x_4.
\end{aligned}
$$

Führt man die Abkürzungen ein[1]):

[1]) Betreffend der geometrischen Bedeutung der Ausdrücke l_α vergleiche Artikel 65.

$$
\begin{aligned}
l_1 &= \quad\cdot\quad + d_{12}^2\,\omega_2\,x_2 + d_{13}^2\,\omega_3\,x_3 + d_{14}^2\,\omega_4\,x_4,\\
l_2 &= d_{21}^2\,\omega_1\,x_1 \quad\cdot\quad + d_{23}^2\,\omega_3\,x_3 + d_{24}^2\,\omega_4\,x_4,\\
l_3 &= d_{31}^2\,\omega_1\,x_1 + d_{32}^2\,\omega_2\,x_2 \quad\cdot\quad + d_{34}^2\,\omega_4\,x_4,\\
l_4 &= d_{41}^2\,\omega_1\,x_1 + d_{42}^2\,\omega_2\,x_2 + d_{43}^2\,\omega_3\,x_3 \quad\cdot\quad,
\end{aligned}
\tag{99}
$$

so lässt sich die Gleichung der mittelnormalen Ebene von $A_a A_b$ in der einfachen Form schreiben

$$l_a - l_b = 0.$$

Nehmen wir z. B. die drei Ebenen

$$l_2 - l_1 = 0, \quad l_3 - l_1 = 0, \quad l_4 - l_1 = 0$$

oder

$$
\begin{aligned}
&d_{21}^2\,\omega_1\,x_1 - d_{12}^2\,\omega_2\,x_2 + (d_{23}^2 - d_{13}^2)\,\omega_3\,x_3 + (d_{24}^2 - d_{14}^2)\,\omega_4\,x_4 = 0,\\
&d_{31}^2\,\omega_1\,x_1 + (d_{32}^2 - d_{12}^2)\,\omega_2\,x_2 - d_{13}^2\,\omega_3\,x_3 + (d_{34}^2 - d_{14}^2)\,\omega_4\,x_4 = 0,\\
&d_{41}^2\,\omega_1\,x_1 + (d_{42}^2 - d_{12}^2)\,\omega_2\,x_2 + (d_{43}^2 - d_{13}^2)\,\omega_3\,x_3 - d_{14}^2\,\omega_4\,x_4 = 0,
\end{aligned}
$$

so bestimmen dieselben durch ihren Schnittpunkt den gesuchten Kugelmittelpunkt. Betrachtet man $\omega_1 x_1$, $\omega_2 x_2$, $\omega_3 x_3$, $\omega_4 x_4$ als Unbekannte, so ist die der Unbekannten $\omega_1 x_1$ entsprechende Determinante

$$
\begin{vmatrix}
1 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2\\
0 & -d_{12}^2 & d_{23}^2 - d_{13}^2 & d_{24}^2 - d_{14}^2\\
0 & d_{32}^2 - d_{12}^2 & -d_{13}^2 & d_{34}^2 - d_{14}^2\\
0 & d_{42}^2 - d_{12}^2 & d_{43}^2 - d_{13}^2 & -d_{14}^2
\end{vmatrix},
$$

wobei der Saum der ersten Zeile und Spalte zur Umformung beigefügt wurde. Nach Addition der ersten Zeile zu den parallelen Zeilen erkennt man, dass diese Determinante den Wert $-4\,D_{10}$ hat. In gleicher Weise erkennt man, dass die den Unbekannten $\omega_2 x_2$, $\omega_3 x_3$, $\omega_4 x_4$ entsprechenden Determinanten $+4\,D_{20}$, $-4\,D_{30}$, $+4\,D_{40}$ sind, so dass

$$\omega_1 x_1 : \omega_2 x_2 : \omega_3 x_3 : \omega_4 x_4 = D_{10} : D_{20} : D_{30} : D_{40}$$

oder

$$\omega_a x_a = \varrho\, D_{a0}$$

ist. Durch Summation über $a = 1$ bis 4 findet man zufolge (91_1)

$$1 = \varrho \cdot 2\triangle^2,$$

sodass

$$\omega_a x_a = \frac{D_{a0}}{2\triangle^2}. \tag{100}$$

und

$$D_{a0} = 2\triangle\delta_a x_a \tag{100}$$

ist. Damit ist die geometrische Bedeutung von D_{a0} klargestellt.

Ist nun R der Radius der umschriebenen Kugel, so ist R auch der Abstand der beiden Punkte

$$M\left(\frac{D_{10}}{\delta_1}, \frac{D_{20}}{\delta_2}, \frac{D_{30}}{\delta_3}, \frac{D_{40}}{\delta_4}\right)\cdot\frac{1}{2\triangle}$$

$$A_1\left(\frac{2\triangle^2}{\delta_1}, 0, 0, 0, \right)\cdot\frac{1}{2\triangle}$$

Wir finden mittels der Distanzformel

$$-4\triangle^4 R^2 = \sum_{ab} d_{ab}^2 D_{a0} D_{b0} - 2\triangle^2\{d_{12}^2 D_{20} + d_{13}^2 D_{30} + d_{14}^2 D_{40}\}.$$

Nun ist aber nach (94) und (91_1)

$$2\sum_{ab} d_{ab}^2 D_{a0} D_{b0} = \sum_a D_{a0}\sum_b d_{ab}^2 D_{b0} = -D_{00}\sum_a D_{a0}$$

$$= -2\triangle^2 D_{00}$$

$$d_{12}^2 D_{20} + d_{13}^2 D_{30} + d_{14}^2 D_{40} = -D_{00}$$

und man erhält schliesslich

$$D_{00} = -4\triangle^2 R^2 \tag{101}$$

oder

$$R^2 = -\frac{D_{00}}{4\triangle^2}. \tag{101}$$

Damit ist auch die Bedeutung von D_{00} angegeben.

55. Bei der Berechnung der D_{a0} wird man sich mit Vorteil der vier Zahlen g_1, g_2, g_3, g_4 bedienen, die durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
g_1 &= \qquad\qquad\qquad \frac{d_{12}^2}{h_1 h_2}\cos(12) + \frac{d_{13}^2}{h_1 h_3}\cos(13) + \frac{d_{14}^2}{h_1 h_4}\cos(14)\\
g_2 &= \frac{d_{21}^2}{h_2 h_1}\cos(21) \qquad\qquad\quad + \frac{d_{23}^2}{h_2 h_3}\cos(23) + \frac{d_{24}^2}{h_2 h_4}\cos(24)\\
g_3 &= \frac{d_{31}^2}{h_3 h_1}\cos(31) + \frac{d_{32}^2}{h_3 h_2}\cos(32) \qquad\qquad\quad + \frac{d_{34}^2}{h_3 h_4}\cos(34)\\
g_4 &= \frac{d_{41}^2}{h_4 h_1}\cos(41) + \frac{d_{42}^2}{h_4 h_2}\cos(42) + \frac{d_{43}^2}{h_4 h_3}\cos(43)
\end{aligned} \tag{102}$$

definiert werden. Es folgt nämlich aus

$$2\Delta^2 = D_{\mathfrak{a}0} + d_{\mathfrak{a}1}^2\, D_{\mathfrak{a}1} + d_{\mathfrak{a}2}^2\, D_{\mathfrak{a}2} + d_{\mathfrak{a}3}^2\, D_{\mathfrak{a}3} + d_{\mathfrak{a}4}^2\, D_{\mathfrak{a}4}$$

die Beziehung

$$D_{\mathfrak{a}0} = \Delta^2 (2 - g_{\mathfrak{a}}). \tag{103}$$

Summiert man diese Formel über $\mathfrak{a} = 1$ bis 4, so ergiebt sich noch durch Vergleichung mit (91_1)

$$g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = 6 \tag{104}$$

oder

$$\sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \frac{d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^2}{h_{\mathfrak{a}} h_{\mathfrak{b}}} \cos(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = 3, \tag{105}$$

d.h.: Teilt man das Quadrat jeder Kante eines Tetraeders durch das Produkt der Höhen, die von den Endpunkten dieser Kante ausgehen, und multipliziert den Quotienten mit dem cos des Flächenwinkels, auf dessen Schenkelebenen jene Höhen gefällt worden sind, so ist die Summe dieser Ausdrücke für jedes Tetraeder gleich drei.

Die Zahlen $g_{\mathfrak{a}}$ lassen sich auch statt durch die $d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ beinahe in derselben Weise durch die $d_{\mathfrak{a}}$ ausdrücken. Wir gelangen zu dieser Darstellung, indem wir die Formel (89) auf die Tetraeder Δ und δ_1 anwenden. Wir erhalten

$$8\Delta\delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_1^2 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_2^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_3^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_4^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

oder nach der zweiten Spalte entwickelt

$$\begin{aligned} 2\Delta\delta_1 &= D_{01} + d_1^2\, D_{11} + d_2^2\, D_{21} + d_3^2\, D_{31} + d_4^2\, D_{41} \\ &= \Delta^2(2 - g_1) + \frac{\Delta^2}{h_1}\left[-\frac{d_1^2}{h_1} + \frac{d_2^2}{h_2}\cos(12) + \frac{d_3^2}{h_3}\cos(13) + \cdot\right]. \end{aligned}$$

Es ist somit

$$\left.\begin{aligned} g_1 h_1 &= 2(h_1 - e_1) - \frac{d_1^2}{h_1} + \frac{d_2^2}{h_2}\cos(12) + \frac{d_3^2}{h_3}\cos(13) + \frac{d_4^2}{h_4}\cos(14), \\ g_2 h_2 &= 2(h_2 - e_2) + \frac{d_1^2}{h_1}\cos(21) - \frac{d_2^2}{h_2} + \frac{d_3^2}{h_3}\cos(23) + \frac{d_4^2}{h_4}\cos(24), \\ g_3 h_3 &= 2(h_3 - e_3) + \frac{d_1^2}{h_1}\cos(31) + \frac{d_2^2}{h_2}\cos(32) - \frac{d_3^2}{h_3} + \frac{d_4^2}{h_4}\cos(34), \\ g_4 h_4 &= 2(h_4 - e_4) + \frac{d_1^2}{h_1}\cos(41) + \frac{d_2^2}{h_2}\cos(42) + \frac{d_3^2}{h_3}\cos(43) - \frac{d_4^2}{h_4}. \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

Auch hieraus folgt wieder

$$g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = 6,$$

da ja

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\cos(12) + \frac{1}{h_3}\cos(13) + \frac{1}{h_4}\cos(14) = 0,\\
+\frac{1}{h_1}\cos(21) - \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\cos(23) + \frac{1}{h_4}\cos(24) = 0,\\
+\frac{1}{h_1}\cos(31) + \frac{1}{h_2}\cos(32) - \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}\cos(34) = 0,\\
+\frac{1}{h_1}\cos(41) + \frac{1}{h_2}\cos(42) + \frac{1}{h_3}\cos(43) - \frac{1}{h_4} = 0.
\end{aligned} \tag{107}$$

56. Die Zahlen g_α können infolge (104) nicht direkt als Koordinaten eines Punktes betrachtet werden. Definiert man aber

$$y_\alpha = \frac{1}{6} \cdot \frac{g_\alpha}{\omega_\alpha}, \tag{108}$$

so erfüllen die y_α die Bedingungsgleichung für Punktkoordinaten und bestimmen daher einen Punkt G, dessen Lage wir untersuchen wollen.

Für den Mittelpunkt M der dem Fundamentaltetraeder umschriebenen Kugel hatten wir die Koordinaten gefunden

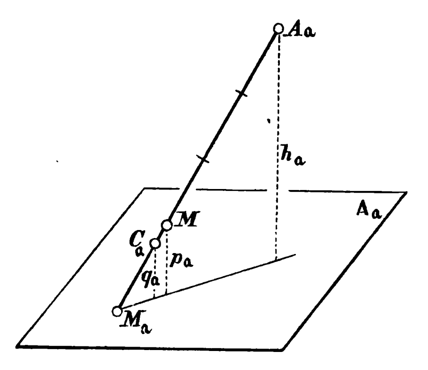
$$\omega_\alpha x_\alpha = \frac{D_{\alpha 0}}{2\triangle^2}.$$

Da nun

$$D_{\alpha 0} = \triangle^2 (2 - g_\alpha),$$

so stehen die Koordinaten von M und G in der Beziehung

$$x_\alpha + 3 y_\alpha = \frac{1}{\omega_\alpha}, \tag{109}$$



aus welcher noch

$$p_\alpha + 3 q_\alpha = h_\alpha$$

oder

$$q_\alpha = \frac{h_\alpha - p_\alpha}{3}$$

folgt. Wir ziehen daraus den Schluss: Schneidet der Strahl $A_\alpha M$ die Ebene $\mathbf{A}_\alpha$ in dem

Punkte M_a und machen wir $M_a C_a$ gleich und gleichgerichtet mit $\frac{1}{3} M A_a$, so schneiden sich die vier Ebenen, die wir durch die Punkte C_1, C_2, C_3, C_4 parallel zu den Ebenen $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$ legen können, in einem Punkte und dieser ist der erwähnte Punkt G.

Sind x_a die Koordinaten eines beliebigen Punktes und berechnet man die y_a aus den Gleichungen

$$x_a + 3\,y_a = \frac{1}{\omega_a}, \tag{110}$$

so folgt leicht

$$\omega_1\,y_1 + \omega_2\,y_2 + \omega_3\,y_3 + \omega_4\,y_4 = 1,$$

d. h. die y_a sind die Koordinaten eines zweiten Punktes. Dieser Punkt kann in gleicher Weise aus dem Punkte x_a konstruiert werden, wie der Punkt G aus M. Teilt man nun die Strecke der Punkte x_a und y_a nach dem Teilverhältnis -3, so erhält der Teilpunkt die Koordinaten

$$\frac{x_a + 3\,y_a}{4} = \frac{1}{4\,\omega_a}.$$

Dies sind aber die Koordinaten des Schwerpunktes des Fundamentaltetraeders. Es stellen somit die Gleichungen (110) eine Aehnlichkeitstransformation des Raumes dar und zwar ist der Schwerpunkt des Fundamentaltetraeders innerer Aehnlichkeitspunkt und 3 das Aehnlichkeitsverhältnis. Bei dieser Transformation entsprechen den Ecken des Fundamentaltetraeders die Schwerpunkte S_a der Dreiecke f_a und dem Punkte M der Punkt G. Es hat somit der Punkt G von den Punkten S_a gleichen Abstand, und zwar ist derselbe $\frac{1}{3} R$. Die Kugel, welche durch die Punkte S_a geht, deren Mittelpunkt somit G ist, entspricht gewissermassen dem Feuerbach'schen Kreis im geradlinigen Dreieck.

D. Normalenprobleme.

57. Zu jeder Ebene ξ_a gehört eine normale Richtung w_a. Wir stellen uns daher die Aufgabe, die Grössen w_a aus den Grössen ξ_a zu berechnen.*)

---

*) Die umgekehrte Aufgabe wird bei einer andern Gelegenheit behandelt. Vergl. Art. 109.

Wir haben in Art. 44 die Neigungswinkel β_a einer Ebene ξ_a gegen die Tetraederebenen berechnet. Wir können die diesbezüglichen Formeln (81) mittels den eingeführten Bezeichnungen (96) und (97) zusammenfassen in

$$-\frac{4}{e_0}\frac{\delta_a}{e_a}\cos\beta_a = D_{a1}\frac{\xi_1}{\delta_1} + D_{a2}\frac{\xi_2}{\delta_2} + D_{a3}\frac{\xi_3}{\delta_3} + D_{a4}\frac{\xi_4}{\delta_4}.$$

Nun bildet die normale Richtung w_a mit den Höhen h_a ebenfalls die Winkel β_a und es ist somit nach Art. 37

$$e_a\, w_a = \cos\beta_a.$$

Es wird daher die gestellte Aufgabe gelöst durch die Formel

$$-\frac{4}{\varepsilon_0}\delta_a\, w_a = D_{a1}\frac{\xi_1}{\delta_1} + D_{a2}\frac{\xi_2}{\delta_2} + D_{a3}\frac{\xi_3}{\delta_3} + D_{a4}\frac{\xi_4}{\delta_4}. \tag{111}$$

Wir merken noch die Gleichung an

$$\frac{4}{\varepsilon_0} = \xi_1\, w_1 + \xi_2\, w_2 + \xi_3\, w_3 + \xi_4\, w_4\,, \tag{112}$$

welche sich leicht aus (111) mittels (98) ergiebt.

Die nach (111) berechneten Grössen w_a müssen den Gleichungen

$$\delta_1\, w_1 + \delta_2\, w_2 + \delta_3\, w_3 + \delta_4\, w_4 = 0 \tag{113}$$

oder

$$\omega_1\, w_1 + \omega_2\, w_2 + \omega_3\, w_3 + \omega_4\, w_4 = 0, \tag{113}$$

$$E(w) = -1 \tag{114}$$

genügen und bei einer Parallelverschiebung der Ebene ξ_a unverändert bleiben. Die erste Gleichung ergiebt sich unmittelbar nach (93), die zweite erfordert einige Rechnung. Es ist

$$\begin{aligned} 2\,\triangle^2\, E(w) &= 2\sum_{ab} d_{ab}^2\,\delta_a\,\delta_b\, w_a\, w_b \\ &= \sum_a \delta_a\, w_a \sum_b d_{ab}^2\,\delta_b\, w_b \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\frac{4}{\varepsilon_0}\sum_b d_{ab}^2\,\delta_b\, w_b &= \sum_b d_{ab}^2\left(D_{b1}\frac{\xi_1}{\delta_1} + D_{b2}\frac{\xi_2}{\delta_2} + D_{b3}\frac{\xi_3}{\delta_3} + \cdot\right) \\ &= 2\,\triangle^2\cdot\frac{\xi_a}{\delta_a} - \left(D_{10}\frac{\xi_1}{\delta_1} + D_{20}\frac{\xi_2}{\delta_2} + \cdot\cdot\right) \end{aligned}$$

[nach (95) und (91)], woraus nun leicht mittels (112) und (113) die Gleichung (114) folgt. Endlich bewirkt die Substitution

$$\eta_a = \xi_a - \mu\frac{\delta_a}{\triangle}$$

keine Änderung der Formel (111), da der mit μ multiplizierte Teil nach (93) den Wert null hat.

Werden die Vorzeichen der Grössen w_α nach der Formel (111) bestimmt, so geht die positive Richtung von w_α auf die positive Seite der Ebene ξ_α. Nehmen wir nämlich auf der positiven Seite der Ebene einen Punkt x_α an, ziehen von demselben aus einen Strahl von der Richtung w_α und nehmen auf dem positiven Teil desselben in der Entfernung $+ d$ den Punkt y_α an, dessen Koordinaten

$$y_\alpha = x_\alpha + d\, w_\alpha$$

sind, so muss der Punkt y_α einen Abstand q von der Ebene ξ_α haben, welcher um d grösser ist als der Abstand p des Punktes x_α. In der That ist

$$\begin{aligned} q &= \frac{\varepsilon_0}{4}(y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3 + y_4 \xi_4) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{4}(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \cdots) + \frac{\varepsilon_0}{4} d\,(w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + \cdots), \end{aligned}$$

welcher Ausdruck nach (86) und (112) gleich $p + d$ ist.

58. Wir erkennen aus den Formeln (111), dass $w_1 = 0$ sein muss, wenn die Ebene ξ_α auf der Ebene $\mathbf{A}_1$, dass $w_1 = w_2 = 0$ sein muss, wenn die Ebene auf $A_3\, A_4$ normal stehen soll, und dass allgemein

$$\eta_1 w_1 + \eta_2 w_2 + \eta_3 w_3 + \eta_4 w_4 = 0 \tag{115}$$

sein muss, wenn die Ebene ξ_α auf der Ebene η_α normal stehen soll. Die letzte Gleichung ist identisch mit der Gleichung $W(\xi \mid \eta) = 0$ (Vergl. Art. 43).

59. Die Formeln (112) und (115) sind spezielle Fälle einer allgemeinen Formel, zu deren Herleitung wir nun übergehen wollen.

Es sei w_α die Normalrichtung der Ebene ξ_α, also

$$-\frac{4}{\varepsilon_0} w_\alpha = \frac{D_{\alpha 1}}{\delta_\alpha \delta_1}\xi_1 + \frac{D_{\alpha 2}}{\delta_\alpha \delta_2}\xi_2 + \frac{D_{\alpha 3}}{\delta_\alpha \delta_3}\xi_3 + \frac{D_{\alpha 4}}{\delta_\alpha \delta_4}\xi_4$$

und η_α eine beliebige Ebene. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{4}{\varepsilon_0}(\eta_1 w_1 + \eta_2 w_2 + \eta_3 w_3 + \eta_4 w_4) &= W(\xi \mid \eta) \\ &= \left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \cos(\xi \mid \eta). \end{aligned}$$

Nun ist aber der Winkel φ der Richtung w_α mit der Ebene η_α dem Winkel der beiden Ebenen ξ_α und η_α komplementär, und wir erhalten daher

$$\frac{4}{\varepsilon_0} \sin \varphi = \eta_1 w_1 + \eta_2 w_2 + \eta_3 w_3 + \eta_4 w_4 . \tag{116}$$

Diese Formel bestimmt den Neigungswinkel φ der Richtung w_α gegen die Ebene η_α und zwar wird der spitze Winkel φ positiv oder negativ gerechnet, je nachdem die positive Richtung von w_α auf die positive oder negative Seite von η_α geht. Sie entspricht in gewisser Weise der Formel (86), welche den Abstand eines im Endlichen gelegenen Punktes von einer Ebene angiebt.

Ist $\varphi = 0$, ist also die Richtung w_α der Ebene η_α parallel, so ist

$$0 = \eta_1 w_1 + \eta_2 w_2 + \eta_3 w_3 + \eta_4 w_4 ,$$

übereinstimmend mit Formel (115). Ist aber $\varphi = 90^0$, so wird

$$\frac{4}{\varepsilon_0} = \eta_1 w_1 + \eta_2 w_2 + \eta_3 w_3 + \eta_4 w_4 ,$$

übereinstimmend mit Gleichung (112).

60. Sind u_α und v_α die genauen Koordinaten zweier Richtungen, so stellen auch die Grössen w_α, berechnet aus

$$\varrho w_\alpha = u_\alpha - \lambda v_\alpha$$

eine Richtung dar, denn aus

$$\omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 + \omega_3 u_3 + \omega_4 u_4 = 0$$
$$\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2 + \omega_3 v_3 + \omega_4 v_4 = 0$$

folgt auch

$$\omega_1 w_1 + \omega_2 w_2 + \omega_3 w_3 + \omega_4 w_4 = 0.$$

Dabei ist ϱ so zu bestimmen, dass die w_α der Gleichung

$$-1 = E(w)$$

genügen. Man erhält

$$\begin{aligned} -\varrho^2 &= E(u) - \lambda E(u \mid v) + \lambda^2 E(v) \\ &= -1 + 2\lambda \cos\varphi - \lambda^2, \end{aligned}$$

wenn φ der Winkel der beiden Richtungen ist (Art. 38). Man darf daher setzen

$$w_\alpha = \frac{u_\alpha - \lambda v_\alpha}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos\varphi + \lambda^2}} . \tag{117}$$

Die positive Richtung von w_a ist bei positiver Wurzel diejenige, welche bei verschwindendem λ mit der positiven Richtung von u_a zusammenfällt.

Zu derselben Formel gelangen wir auch, wenn wir zu den drei Ebenen ξ_a, η_a und ζ_a, deren Koordinaten durch die Formeln verbunden sind

$$\varrho\, \zeta_a = \xi_a - \lambda\, \eta_a\,, \quad \varrho = \sqrt{1 - 2\,\lambda \cos\varphi + \lambda^2}$$

(vergl. Art. 49 und 51), die Normalrichtungen u_a, v_a und w_a berechnen. Da

$$-\frac{4}{\varepsilon_0}\,\delta_a\, u_a = \frac{D_{a1}}{\delta_1}\,\xi_1 + \frac{D_{a2}}{\delta_2}\,\xi_2 + \frac{D_{a3}}{\delta_3}\,\xi_3 + \frac{D_{a4}}{\delta_4}\,\xi_4\,, \tag{118}$$

$$-\frac{4}{\varepsilon_0}\,\delta_a\, v_a = \frac{D_{a1}}{\delta_1}\,\eta_1 + \frac{D_{a2}}{\delta_2}\,\eta_2 + \frac{D_{a3}}{\delta_3}\,\eta_3 + \frac{D_{a4}}{\delta_4}\,\eta_4\,, \tag{119}$$

$$-\frac{4}{\varepsilon_0}\,\delta_a\, w_a = \frac{D_{a1}}{\delta_1}\,\zeta_1 + \frac{D_{a2}}{\delta_2}\,\zeta_2 + \frac{D_{a3}}{\delta_3}\,\zeta_3 + \frac{D_{a4}}{\delta_4}\,\zeta_4$$

ist, so ist

$$-\varrho \cdot \frac{4}{\varepsilon_0}\,\delta_a\, w_a = \frac{D_{a1}}{\delta_1}\,(\xi_1 - \lambda\,\eta_1) + \frac{D_{a2}}{\delta_2}\,(\xi_2 - \lambda\,\eta_2) + \frac{D_{a3}}{\varrho_3}\,(\xi_3 - \lambda\,\eta_3) + \cdot$$

$$= -\frac{4}{\varepsilon_0}\,\delta_a\, u_a + \lambda \cdot \frac{4}{\varepsilon_0}\,\delta_a\, v_a\,,$$

also

$$\varrho\, w_a = u_a - \lambda\, v_a$$

wie oben. Gleichzeitig ergiebt sich nach dieser Herleitung, dass die Richtung w_a dem Büschel der Richtungen u_a und v_a angehört und den Winkel φ dieser Richtungen nach dem Teilverhältnis λ teilt.

61. Seien wieder u_a und v_a die Normalrichtungen der Ebenen ξ_a und η_a. Da nun der Winkel φ der Richtungen mit dem Winkel φ der beiden Ebenen übereinstimmt und einerseits

$$-2\cos\varphi = E\,(u\,|\,v)$$

anderseits

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \cos\varphi = W\,(\xi\,|\,\eta)$$

ist, so muss

$$-\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 E\,(u\,|\,v) = 2\;W\,(\xi\,|\,\eta) \tag{120}$$

sein. Diese Gleichung verbindet die beiden metrischen Funktionen

E und W miteinander; sie geht mittels der Substitutionen (118) und (119) in eine Identität über.

Diese Identität liefert uns noch eine Formel über das Tetraeder. Es ist nämlich

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \Delta^2 E(u \mid v) = E\left(\frac{4}{\varepsilon_0} \Delta u \mid \frac{4}{\varepsilon_0} \Delta v\right)$$

$$= \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^2 \cdot \frac{4}{\varepsilon_0} \delta_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{a}} \cdot \frac{4}{\varepsilon_0} \delta_{\mathfrak{b}} v_{\mathfrak{b}}$$

$$= \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^2 \left[\sum_{\mathfrak{p}} D_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}} \frac{\xi_{\mathfrak{p}}}{\delta_{\mathfrak{p}}} \cdot \sum_{\mathfrak{q}} D_{\mathfrak{b}\mathfrak{q}} \frac{\eta_{\mathfrak{q}}}{\delta_{\mathfrak{q}}}\right]$$

$$= \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\mathfrak{q}} \frac{\xi_{\mathfrak{p}}\, \eta_{\mathfrak{q}}}{\delta_{\mathfrak{p}}\, \delta_{\mathfrak{q}}} \left[\sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^2 D_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}} D_{\mathfrak{b}\mathfrak{q}}\right].$$

Dieser Ausdruck ist nun nach (120) gleich

$$-2 \Delta^2 W(\xi \mid \eta) = 2 \Delta^2 \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\mathfrak{q}} D_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} \frac{\xi_{\mathfrak{p}}\, \eta_{\mathfrak{q}}}{\delta_{\mathfrak{p}}\, \delta_{\mathfrak{q}}}.$$

Durch Koeffizientenvergleichung ergiebt sich daraus

$$2 \Delta^2 D_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} = \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^2 D_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}} D_{\mathfrak{b}\mathfrak{q}}. \tag{121}$$

In der That ist

$$\sum_{\mathfrak{b}} d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^2 D_{\mathfrak{b}\mathfrak{q}} = 2 \Delta^2 - D_{\mathfrak{q}0}\,, \quad \text{wenn } \mathfrak{a} = \mathfrak{q}$$

$$= \quad - D_{\mathfrak{q}0}\,, \quad \text{„} \quad \mathfrak{a} \neq \mathfrak{q}$$

und daher

$$\sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^2 D_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}} D_{\mathfrak{b}\mathfrak{q}} = D_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} \cdot 2 \Delta^2 - D_{\mathfrak{q}0} \sum_{\mathfrak{a}} D_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}}\,.$$

Da nun $\sum_{\mathfrak{a}} D_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}} = 0$ ist, so ist die obige Formel neuerdings bewiesen.

Setzen wir für die Subdeterminanten $D_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ ihre Werte ein und nehmen zunächst an, $\mathfrak{q}$ sei gleich $\mathfrak{p}$, so ergiebt (121)

$$-\Delta^2 = \sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^2 f_{\mathfrak{a}} f_{\mathfrak{b}} \cos(\mathfrak{a}\mathfrak{p}) \cos(\mathfrak{b}\mathfrak{p}),$$

also z. B. für $\mathfrak{p} = 1$

$$-\Delta^2 = d_{23}^2 f_2 f_3 \cos 21 \cos 31 + d_{34}^2 f_3 f_4 \cos 31 \cos 41$$
$$+ d_{42}^2 f_4 f_2 \cos 41 \cos 21 - f_1 (d_{12}^2 f_2 \cos 21 + d_{13}^2 f_3 \cos 31 + d_{14}^2 f_4 \cos 41)$$

Nimmt man aber an, $\mathfrak{q}$ sei nicht gleich $\mathfrak{p}$, so ergiebt (121)

$$2 \Delta^2 \cos(\mathfrak{p}\mathfrak{q}) = \sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^2 f_{\mathfrak{a}} f_{\mathfrak{b}} (\cos \mathfrak{a}\mathfrak{p} \cos \mathfrak{b}\mathfrak{q} + \cos \mathfrak{a}\mathfrak{q} \cos \mathfrak{b}\mathfrak{p}),$$

also z. B. für $\mathfrak{p} = 1$ und $\mathfrak{q} = 2$

$$2\,\triangle^2 \cos 12$$

$$= d_{12}^2 f_1 f_2 (1 + \cos^2 12) + d_{34}^2 f_3 f_4 (\cos 13 \cos 24 + \cos 23 \cos 14)$$
$$+ d_{13}^2 f_1 f_3 (\cos 31 \cos 21 - \cos 32) + d_{24}^2 f_2 f_4 (\cos 42 \cos 21 - \cos 41)$$
$$+ d_{23}^2 f_2 f_3 (\cos 21 \cos 32 - \cos 13) + d_{14}^2 f_1 f_4 (\cos 12 \cos 14 - \cos 24).$$

62. Wir wollen nun zur Lösung der in Art. 50 angegebenen Aufgabe übergehen und die Koordinaten der Normalprojektion eines beliebigen Punktes y_α auf eine beliebige Ebene ξ_α berechnen. Sind x_α die gesuchten Koordinaten und p die Länge des projizierenden Lotes, also

$$p = \frac{\varepsilon_0}{4}(y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3 + y_4 \xi_4),$$

so ist, wenn y_α auf der positiven Seite von ξ_α ist, also p positiv ist, die Richtung von x_α nach y_α die positive Richtung der Normalen von ξ_α und daher

$$\frac{y_\alpha - x_\alpha}{p} = w_\alpha.$$

Liegt dagegen y_α auf der negativen Seite von ξ_α, so ist die Richtung von y_α nach x_α die positive Richtung der Normalen, p negativ und daher

$$\frac{x_\alpha - y_\alpha}{-p} = w_\alpha.$$

In beiden Fällen folgt

$$x_\alpha = y_\alpha - p\, w_\alpha, \tag{122}$$

wobei sich die w_α nach den Formeln (111) berechnen. Die Formel (122) löst die gestellte Aufgabe.

Projizieren wir z. B. einen Punkt auf zwei sich schneidende Ebenen, so können wir die Distanz der beiden Projektionen auf zwei Arten ermitteln. Das eine Mal können wir aus dem Dreieck, das durch die beiden projizierenden Lote gebildet wird, die betreffende Distanz berechnen, das andere Mal auf die berechneten Projektionskoordinaten die Distanzformel anwenden. Die beiden erhaltenen Ausdrücke sind nicht unmittelbar gleich, sondern gehen erst mittels (121) in einander über.

63. Es sei F ein Flächenstück, das in der Ebene ξ_a liegt. Sind nun F_1, F_2, F_3, F_4 die normalen Projektionen desselben auf die Ebenen des Fundamentaltetraeders und β_1, β_2, β_3, β_4 die Neigungswinkel der Ebene ξ_a gegen diese Ebenen, so ist bekanntlich

$$F_a = F \cdot \cos\beta_a\,,$$

wobei zu beachten, dass β_a auch stumpf und somit F_a negativ sein kann. Da nun anderseits

$$e_a\, w_a = \cos\beta_a$$

ist, insofern w_a die positive Normalrichtung der Ebene ξ_a ist, so hat man

$$F_a = F \cdot e_a\, w_a\,. \tag{123}$$

Nun erfüllen die w_a die Gleichung

$$-1 = E(w),$$

welche mittels (123) übergeht in

$$-F^2 = E\left(\frac{F_a}{e_a}\right),$$

oder ausführlicher geschrieben

$$\begin{aligned} -F^2 = {} & \frac{d_{23}^2}{h_2\, h_3} F_2\, F_3 + \frac{d_{31}^2}{h_3\, h_1} F_3\, F_1 + \frac{d_{12}^2}{h_1\, h_2} F_1\, F_2 \\ & + \frac{d_{14}^2}{h_1\, h_4} F_1\, F_4 + \frac{d_{24}^2}{h_2\, h_4} F_2\, F_4 + \frac{d_{34}^2}{h_3\, h_4} F_3\, F_4\,. \end{aligned} \tag{124}$$

Diese Formel entspricht der bekannten

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$$

im rechtwinkligen System.

64. Formel (124) findet z. B. Anwendung bei der Berechnung der genauen Koordinaten der Ebene, welche drei nicht in gerader Linie liegende Punkte x_a, y_a, z_a verbindet. Bezeichnet man mit ξ_a' die Subdeterminanten der letzten Zeile von

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

so hat man bekanntlich für die genauen Koordinaten ξ_a der Verbindungsebene

$$\varrho \cdot \xi_a = \xi_a'\,.$$

Es sei nun s die doppelte Fläche des Dreiecks der drei Punkte und V das sechsfache Volumen des Tetraeders, gebildet von den Punkten x_α, y_α, z_α, A_1. Dann ist

$$V = s \cdot \pi_1,$$

ferner nach Art. 34

$$V = \nabla \frac{h_1}{e_1} \xi_1'$$

und nach Art. 47

$$\pi_1 = \frac{\varepsilon_0}{4} \cdot \frac{h_1}{e_1} \cdot \xi_1.$$

Daraus folgt

$$\varrho = \frac{\varepsilon_0}{4} \cdot \frac{s}{\nabla}.$$

Damit ist die Bestimmung von ϱ auf diejenige von s zurückgeführt. Die positive Seite der Ebene ξ_α ist nach Herleitung diejenige, von der aus die Punkte x_α, y_α, z_α im Sinne der Uhrzeigerbewegung sich folgen.

Sind nun s_α die Normalprojektionen von s auf die Ebenen des Fundamentaltetraeders, so können diese leicht nach den Formeln (122) und (12) bestimmt werden und ergeben dann nach (124) durch

$$-s^2 = E\left(\frac{s_\alpha}{e_\alpha}\right) \tag{125}$$

den Wert von s und damit auch den Wert von ϱ.

Die Grösse s erhalten wir auch folgendermassen. Da die

$$\xi_\alpha = \frac{4}{\varepsilon_0} \frac{\nabla}{s} \cdot \xi_\alpha' \tag{126}$$

der Bedingungsgleichung der Ebenenkoordinaten genügen müssen, so ist

$$s^2 = \nabla^2 \cdot W(\xi' \mid \xi'). \tag{127}$$

65. Wir können nun auch die Bedeutung der Ausdrücke l_α angeben (vgl. Art. 54). Zunächst ist klar, dass $l_\alpha = 0$ die Gleichung einer durch A_α gehenden Ebene ist. Die Koeffizienten derselben stellen daher nach Multiplikation mit einem passenden Faktor die Koordinaten dieser Ebene dar. Da nun die Ebenen $l_1 = 0$ und $l_2 = 0$ sich in der Ebene $l_1 - l_2 = 0$, d. h. in der mittelnormalen Ebene der Kante $A_1 A_2$ schneiden und die letztere Ebene den

Flächenwinkel der ersteren halbiert, so schliessen wir daraus, dass der erwähnte Faktor bei l_1 und l_2 und damit bei allen l_a derselbe ist.

Es seien nun $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ die wahren Koordinaten der Ebene $l_1 = 0$, so dass wir setzen können

$$\begin{aligned}\varrho\, \xi_1 &= 0,\\ \varrho\, \xi_2 &= d_{12}^2\, \omega_2,\\ \varrho\, \xi_3 &= d_{13}^2\, \omega_3,\\ \varrho\, \xi_4 &= d_{14}^2\, \omega_4;\end{aligned}$$

der Faktor ϱ ist so zu bestimmen, dass die ξ_a der Bedingungsgleichung

$$-\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 = \sum_a \sum_b \frac{D_{ab}}{\delta_a \delta_b}\, \xi_a \xi_b$$

genügen. Man findet leicht mit Hülfe der Formeln (91), (94), (95)

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \triangle^2 \varrho^2 = -D_{00}$$

und daher mit Benützung von (101)

$$\varrho = \frac{\varepsilon_0}{4} \cdot 2R. \tag{128}$$

Es ist also in der That ϱ von dem speziellen Index 1 unabhängig.

Wir wollen nun die normale Richtung w_a dieser Ebene berechnen. Nach (111) erhält man leicht

$$\begin{aligned}-\triangle \cdot 2R\, \delta_a w_a &= d_{12}^2\, D_{a2} + d_{13}^2\, D_{a3} + d_{14}^2\, D_{a4}\\ &= -D_{a0}, \qquad \text{wenn } a = 2, 3, 4\\ &= 2\triangle^2 - D_{10}, \quad \text{wenn } a = 1.\end{aligned}$$

Führt man nun nach (100) für die D_{a0} die Koordinaten des Mittelpunkts der umschriebenen Kugel ein, so ergiebt sich

$$w_a = \frac{x_a - 0}{R}, \quad \text{wenn } a = 2, 3, 4,$$

$$w_1 = \frac{x_1 - \frac{h_1}{e_1}}{R}, \quad \text{wenn } a = 1.$$

Daraus geht aber hervor, dass diese Normalrichtung mit der Richtung von A_1 nach dem Mittelpunkt der umschriebenen Kugel übereinstimmt. Es sind demnach $l_a = 0$ die Ebenen, welche die dem Fundamentaltetraeder umschriebene Kugel in den Ecken desselben berühren.

66. Endlich haben wir noch die Bedeutung der Gleichungen zu untersuchen

$$E(u) = 0 \text{ und } W(\xi \mid \xi) = 0, \qquad (129)$$

welche aus den Bedingungsgleichungen für Richtungs- und Ebenenkoordinaten dadurch entspringen, dass man das konstante Glied durch Null ersetzt. Nach Art. 38 stellt die erste Gleichung solche Richtungen dar, die auf sich selbst normal stehen. Da dies nur für die Punkte des absoluten Kugelkreises zutrifft, so ist die erste Gleichung die Punktgleichung dieses Kreises. Aehnlich schliessen wir, dass die zweite Gleichung die Enveloppengleichung desselben Kreises ist.

III.

Strahlenkoordinaten.

A. Strahlen des endlichen Raumes.

67. Die Determinanten zweiten Grades, welche man aus den Koordinaten zweier Punkte oder zweier Ebenen bilden kann, fasst man bekanntlich als Koordinaten des Verbindungsstrahls jener Punkte oder der Schnittlinie dieser Ebenen auf (Grassmann 1844, Cayley 1859, Plücker 1865 und 1868). Nimmt man für dieselbe Gerade zwei andere Punkte oder zwei andere Ebenen an, so werden die Verhältnisse dieser Determinanten nicht geändert. Hier handelt es sich vor allem darum, die absoluten Werte dieser Determinanten in passender Weise zu fixieren. Wir beginnen mit den Strahlenkoordinaten erster Art, die sich aus den Koordinaten zweier Punkte des Strahles ergeben.

68. Die genauen Koordinaten der beiden Punkte X und Y, welche den Strahl bestimmen, seien x_α und y_α; die Richtung von X nach Y nennen wir die positive Richtung des Strahls. Die Strahlenkoordinaten bilden wir aus der Matrix

$$\begin{Vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{Vmatrix}$$

als

$$p'_{\alpha\beta} = y_\alpha x_\beta - y_\beta x_\alpha.$$

Wie bei der Berechnung der Koordinaten der positiven Richtung von x_α nach y_α als $w_\alpha = \frac{y_\alpha - x_\alpha}{d}$ lassen wir den zweiten Punkt an erste Stelle treten. Der Strahl, welcher mit dem ersten geometrisch zusammenfällt, aber entgegengesetzte Richtung besitzt, hat die Koordinaten $-p'_{\alpha\beta}$ *). Von den zwölf Determinanten wählt

*) Wie wir aus den Werten $p'_{\alpha\beta}$ die positive Richtung des Strahles ermitteln können, ersehen wir aus Art. 74.

man gewöhnlich sechs, z. B.

$$p'_{23},\quad p'_{31},\quad p'_{12}\quad p'_{14},\quad p'_{24}\quad p'_{34}$$

als die eigentlichen Koordinaten des Strahles aus. Da aber darunter die Symmetrie der Formeln leidet, so lassen wir im folgenden alle zwölf p'_{ab} gleichmässig zu, erinnern uns aber stets daran, dass zufolge

$$p'_{ab} + p'_{ba} = 0$$

der Grad ihrer Mannigfaltigkeit nur sechs beträgt.

Nimmt man nun statt X und Y auf derselben Geraden zwei andere Punkte X^* und Y^* an, so werden sich deren wahre Koordinaten nach (60) darstellen lassen in der Form

$$x_a^* = \frac{x_a - \lambda y_a}{1-\lambda},\quad y_a^* = \frac{x_a - \mu y_a}{1-\mu},$$

sodass die neuen Strahlenkoordinaten die Werte haben

$$p_{ab}^{*\prime} = \frac{1}{(1-\lambda)(1-\mu)} \begin{vmatrix} x_a - \mu y_a, & x_a - \lambda y_a \\ x_b - \mu y_b, & x_b - \lambda y_b \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\lambda-\mu}{(1-\lambda)(1-\mu)}\, p'_{ab}.$$

Damit ist nicht nur die Berechtigung jener Determinanten als Strahlenkoordinaten nachgewiesen, sondern auch die Möglichkeit gegeben, die absoluten Werte der p'_{ab} zu bestimmen.

Sind nämlich d und d^* die Distanzen des ersten und zweiten Punktepaares und zudem $YX^* = n$, so hat man nach der Bedeutung des Teilverhältnisses

X Y X* Y*
d n d*

$$\lambda = \frac{d+n}{n},\quad \mu = \frac{d+n+d^*}{n+d^*},$$

also

$$\lambda - 1 = \frac{d}{n},\quad \mu - 1 = \frac{d}{n+d^*}$$

und daher

$$\frac{\lambda-\mu}{(1-\lambda)(1-\mu)} = \frac{1}{\mu-1} - \frac{1}{\lambda-1} = \frac{d^*}{d}.$$

Es ist somit

$$\frac{p'_{ab}}{d} = \frac{p_{ab}^{*\prime}}{d^*}, \tag{130}$$

d. h. die p'_{ab} sind nicht abhängig von der Lage der beiden Punkte

auf der Geraden, sondern nur von ihrer gegenseitigen Entfernung. Es wird sich daher empfehlen, als wahre Koordinaten eines Strahles die Werte p'_{ab}, dividiert durch die Distanz der beiden den Strahl definierenden Punkte, einzuführen, oder also die definierenden Punkte in der Distanz „Eins" anzunehmen. Diese wahren oder genauen Koordinaten bezeichnen wir mit p_{ab}, sodass

$$p_{ab} = \frac{p'_{ab}}{d}.$$

Nach Festsetzung des absoluten Wertes der p_{ab} werden dieselben einer nicht homogenen Gleichung genügen. Zu der Herleitung dieser Gleichung werden wir erst später übergehen können.

69. Die Koordinaten zweiter Art eines durch zwei Ebenen von den genauen Koordinaten ξ_a und η_a bestimmten Strahles bilden wir aus der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \end{matrix} \right\|$$

als

$$\pi'_{ab} = \eta_a \xi_b - \eta_b \xi_a.$$

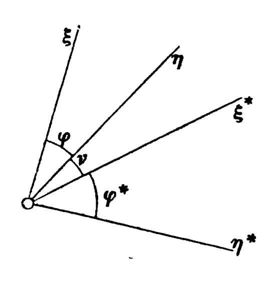
Dabei geben wir dem Strahle noch einen bestimmten Richtungssinn. Drehen wir die erste Ebene ξ_a um einen hohlen Winkel, bis sie mit der zweiten Ebene η_a vollständig (Art. 51) zusammenfällt, so ist dadurch eine positive Drehung um den Strahl π'_{ab} definiert. Denken wir uns nun einen Beobachter so in dem Strahle liegend, dass derselbe diese Drehung als von links nach rechts gehend beurteilt, so nennen wir die Richtung von Fuss zu Kopf die positive Richtung. Vertauschen wir die beiden Ebenen, so ändert sich jener Drehungssinn, damit auch die Richtung des Strahls, während sämtliche Koordinaten ihre Zeichen wechseln. Es ist daher gerechtfertigt, wenn wir dem ersten Strahl die Koordinaten π'_{ab}, dem zweiten die Koordinaten $-\pi'_{ab}$ geben.

Führen wir zwei andere Ebenen desselben Büschels als den Strahl bestimmende Ebenen ein, so können wir deren genaue Koordinaten in der Form darstellen (Art. 49)

$$\xi^*_a = \frac{\xi_a - \lambda\eta_a}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2}}, \quad \eta^*_a = \frac{\xi_a - \mu\eta_a}{\sqrt{1 - 2\mu\cos\varphi + \mu^2}}.$$

Diese ergeben die Strahlenkoordinaten

$$\pi^{*\prime}_{ab} = \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos\varphi + \lambda^2} \cdot \sqrt{1 - 2\mu \cos\varphi + \mu^2}} \pi'_{ab}.$$



Sind nun φ und φ^* die Winkel des ersten und zweiten Ebenenpaares und ν der Winkel der Ebenen η_a und ξ^*_a, so hat man der Bedeutung des Teilverhältnisses gemäss

$$\lambda = \frac{\sin(\varphi + \nu)}{\sin \nu} = \sin\varphi \cdot \operatorname{cotg} \nu + \cos\varphi$$

$$\mu = \frac{\sin(\varphi + \nu + \varphi^*)}{\sin(\nu + \varphi^*)} = \sin\varphi \cdot \operatorname{cotg}(\nu + \varphi^*) + \cos\varphi,$$

und daher wird der bei π'_{ab} stehende Faktor gleich

$$\frac{\sin\varphi^*}{\sin\varphi}.$$

Da nun

$$\frac{\pi^{*\prime}_{ab}}{\sin\varphi^*} = \frac{\pi'_{ab}}{\sin\varphi} \tag{131}$$

ist, so sind die Koordinaten π'_{ab} nur von dem Winkel des definierenden Ebenenpaares abhängig, nicht aber von der Lage dieser Ebenen im Ebenenbüschel. Es sind daher die Determinanten π'_{ab}, dividiert durch den Sinus des Winkels des definierenden Ebenenpaares als genaue Koordinaten des Strahles aufzufassen oder, mit andern Worten, die den Strahl bestimmenden Ebenen normal zu wählen. Wir schreiben für die wahren Strahlenkoordinaten zweiter Art

$$\pi_{ab} = \frac{\pi'_{ab}}{\sin\varphi}.$$

Auch diese Koordinaten werden einer nicht homogenen Gleichung mit Gliedern von nur gerader Dimension genügen.

70. Die Strahlenkoordinaten genügen bekanntlich der identischen Relation

$$p_{23}\, p_{14} + p_{31}\, p_{24} + p_{12}\, p_{34} = 0$$

oder (132)

$$\pi_{23}\, \pi_{14} + \pi_{31}\, \pi_{24} + \pi_{12}\, \pi_{34} = 0,$$

welche die sechsfache Mannigfaltigkeit auf eine fünffache reduziert,

entsprechend den vierfach unendlich vielen Strahlen des Raumes. Man beachte, dass man diese Gleichungen infolge der Beziehungen

$$p_{ab} + p_{ba} = 0, \quad \pi_{ab} + \pi_{ba} = 0$$

in mannigfach anderer Art schreiben kann, dass aber, wenn diese Produkte additiv verbunden die Summe Null ergeben sollen, die Anzahl der Inversionen in den vier Indices bei allen drei Gliedern entweder gerade oder bei allen drei Gliedern ungerade sein muss.

71. Beziehen sich die Strahlenkoordinaten p_{ab} und π_{ab} erster und zweiter Art auf denselben Strahl, so ergiebt sich leicht (vgl. z. B. Fiedler, Darst. Geom. III. Teil. § 25)

$$p_{23} : p_{31} : p_{12} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = \pi_{14} : \pi_{24} : \pi_{34} : \pi_{23} : \pi_{31} : \pi_{12}.$$

Diese Proportion können wir durch die Gleichung

$$\pi_{ab} = \tau \cdot p_{cb} \tag{133}$$

ersetzen, wobei $abcb$ eine gerade*) Permutation von 1 2 3 4 darstellt. Dabei hat der Proportionalitätsfaktor τ für jeden Strahl einen bestimmten Wert und zwar ist er eine lineare Grösse, da nach Definition die π_{ab} reine Zahlen, die p_{ab} dagegen von der Dimension -1 sind.

Der Wert von τ wird später berechnet. Ist dieser Wert einmal bekannt, so werden die Strahlenkoordinaten der einen Art überflüssig. Es empfiehlt sich indessen, beide Arten beizubehalten, da bald die einen, bald die andern mit Vorteil verwendet werden können.

72. Wir haben noch an das folgende Bekannte zu erinnern.

Liegt der Punkt z_a auf der Geraden XY oder p_{ab}, so verschwinden die vier Determinanten dritten Grades, die sich aus dem rechteckigen System

$$\begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix}$$

bilden lassen. Wir erhalten demnach

*) Mit gerader Inversionsanzahl.

$$\begin{array}{rrrrl} \cdot & z_2\,p_{34} + & z_3\,p_{42} + & z_4\,p_{23} & = 0 \\ z_1\,p_{43} & \cdot & + z_3\,p_{14} + & z_4\,p_{31} & = 0 \\ z_1\,p_{24} + & z_2\,p_{41} & \cdot & + z_4\,p_{12} & = 0 \\ z_1\,p_{32} + & z_2\,p_{13} + & z_3\,p_{21} & \cdot & = 0, \end{array} \tag{134}$$

Gleichungen, welche die Incidenz des Punktes z_a mit der Geraden p_{ab} ausdrücken.

Multipliziert man die drei letzten Gleichungen mit p_{21}, p_{31}, p_{41} und addiert sie, so erhält man identisch null. Es ist somit jede der drei Gleichungen eine Folge der beiden andern. Da man dies offenbar von je drei Gleichungen des Systems (134) aussagen kann, so sind unter diesen vier Gleichungen im allgemeinen*) nur zwei unabhängig, was mit dem geometrischen Sachverhalt im Einklang steht.

Infolge der Gleichung (133) können wir die letzten Gleichungen auch schreiben

$$\begin{array}{rrrrl} \cdot & \pi_{12}\,z_2 + & \pi_{13}\,z_3 + & \pi_{14}\,z_4 & = 0 \\ \pi_{21}\,z_1 & \cdot & + \pi_{23}\,z_3 + & \pi_{24}\,z_4 & = 0 \\ \pi_{31}\,z_1 + & \pi_{32}\,z_2 & \cdot & + \pi_{34}\,z_4 & = 0 \\ \pi_{41}\,z_1 + & \pi_{42}\,z_2 + & \pi_{43}\,z_3 & \cdot & = 0. \end{array} \tag{135}$$

In gleicher Weise erhalten wir für die Incidenz eines Strahles π_{ab} oder p_{ab} mit einer Ebene ζ_a die Gleichungen

$$\begin{array}{rrrrl} \cdot & \zeta_2\,\pi_{34} + & \zeta_3\,\pi_{42} + & \zeta_4\,\pi_{23} & = 0 \\ \zeta_1\,\pi_{43} & \cdot & + \zeta_3\,\pi_{14} + & \zeta_4\,\pi_{31} & = 0 \\ \zeta_1\,\pi_{24} + & \zeta_2\,\pi_{41} & \cdot & + \zeta_4\,\pi_{12} & = 0 \\ \zeta_1\,\pi_{32} + & \zeta_2\,\pi_{13} + & \zeta_3\,\pi_{21} & \cdot & = 0 \end{array} \tag{136}$$

oder

$$\begin{array}{rrrrl} \cdot & p_{12}\,\zeta_2 + & p_{13}\,\zeta_3 + & p_{14}\,\zeta_4 & = 0 \\ p_{21}\,\zeta_1 & \cdot & + p_{23}\,\zeta_3 + & p_{24}\,\zeta_4 & = 0 \\ p_{31}\,\zeta_1 + & p_{32}\,\zeta_2 & \cdot & + p_{34}\,\zeta_4 & = 0 \\ p_{41}\,\zeta_1 + & p_{42}\,\zeta_2 + & p_{43}\,\zeta_3 & \cdot & = 0, \end{array} \tag{137}$$

von welchen Gleichungen wieder im allgemeinen nur je zwei unabhängig sind.

---

*) Ist z. B. $p_{34} = 0$, so sind schon die beiden ersten Gleichungen von (134) nicht unabhängig.

73. Es sei nun z_a nicht auf dem Strahle p_{ab} gelegen. Setzen wir

$$\begin{aligned}
\varrho' \zeta_1 &= \quad \cdot \quad + z_2 p_{34} + z_3 p_{42} + z_4 p_{23} \\
\varrho' \zeta_2 &= z_1 p_{43} \quad \cdot \quad + z_3 p_{14} + z_4 p_{31} \\
\varrho' \zeta_3 &= z_1 p_{24} + z_2 p_{41} \quad \cdot \quad + z_4 p_{12} \\
\varrho' \zeta_4 &= z_1 p_{32} + z_2 p_{13} + z_3 p_{21} \quad \cdot \quad ,
\end{aligned} \tag{138}$$

so können wir ϱ' so bestimmt denken, dass die ζ_a der Bedingungsgleichung der Ebenenkoordinaten genügen. Es kann nämlich ϱ' nicht verschwinden, da sonst z_a mit dem Strahle p_{ab} incident wäre. Multipliziert man die Gleichungen (138) mit z_1, z_2, z_3, z_4 und addiert sie, so erhält man

$$\varrho' (\zeta_1 z_1 + \zeta_2 z_2 + \zeta_3 z_3 + \zeta_4 z_4) = - \varrho' (z_1 \zeta_1 + z_2 \zeta_2 + z_3 \zeta_3 + z_4 \zeta_4),$$

welche Gleichung, weil $\varrho' \neq 0$ ist, nur statthaben kann, wenn

$$z_1 \zeta_1 + z_2 \zeta_2 + z_3 \zeta_3 + z_4 \zeta_4 = 0$$

ist. Es geht daher die Ebene ζ_a durch den Punkt z_a. Multipliziert man aber die Gleichungen (138) mit

$$0, \quad p_{12}, \quad p_{13}, \quad p_{14}$$

oder mit

$$p_{21}, \quad 0, \quad p_{23}, \quad p_{24}$$

und addiert sie, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\cdot \quad p_{12} \zeta_2 + p_{13} \zeta_3 + p_{14} \zeta_4 &= 0 \\
p_{21} \zeta_1 \quad \cdot \quad + p_{23} \zeta_3 + p_{24} \zeta_4 &= 0,
\end{aligned}$$

d. h. die beiden ersten Gleichungen von (137), welche ausdrücken, dass die Ebene ζ_a durch den Strahl p_{ab} geht. Es stellen somit die durch (138) definierten Grössen ζ_a die Verbindungsebene des Punktes z_a mit der Geraden p_{ab} dar. Diese Formeln können mit Änderung des Proportionalitätsfaktors auch geschrieben werden

$$\begin{aligned}
\varrho \zeta_1 &= \quad \cdot \quad \pi_{12} z_2 + \pi_{13} z_3 + \pi_{14} z_4 \\
\varrho \zeta_2 &= \pi_{21} z_1 \quad \cdot \quad + \pi_{23} z_3 + \pi_{24} z_4 \\
\varrho \zeta_3 &= \pi_{31} z_1 + \pi_{32} z_2 \quad \cdot \quad + \pi_{34} z_4 \\
\varrho \zeta_4 &= \pi_{41} z_1 + \pi_{42} z_2 + \pi_{43} z_3 \quad \cdot
\end{aligned} \tag{139}$$

In gleicher Weise zeigt man, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\sigma' z_1 &= \quad \cdot \quad \zeta_2 \pi_{34} + \zeta_3 \pi_{42} + \zeta_4 \pi_{23} \\
\sigma' z_2 &= \zeta_1 \pi_{43} \quad \cdot \quad + \zeta_3 \pi_{14} + \zeta_4 \pi_{31} \\
\sigma' z_3 &= \zeta_1 \pi_{24} + \zeta_2 \pi_{41} \quad \cdot \quad + \zeta_4 \pi_{12} \\
\sigma' z_4 &= \zeta_1 \pi_{32} + \zeta_2 \pi_{13} + \zeta_3 \pi_{21} \quad \cdot
\end{aligned} \tag{140}$$

oder

$$\begin{array}{llllll} \sigma z_1 = & \cdot & p_{12}\zeta_2 & + p_{13}\zeta_3 & + p_{14}\zeta_4 & \\ \sigma z_2 = & p_{21}\zeta_1 & \cdot & + p_{23}\zeta_3 & + p_{24}\zeta_4 & \\ \sigma z_3 = & p_{31}\zeta_1 & + p_{32}\zeta_2 & \cdot & + p_{34}\zeta_4 & \\ \sigma z_4 = & p_{41}\zeta_1 & + p_{42}\zeta_2 & + p_{43}\zeta_3 & \cdot & , \end{array} \qquad (141)$$

wenn die Ebene ζ_a nicht durch den Strahl π_{ab} oder p_{ab} geht, in den z_a die Koordinaten des Schnittpunktes jener Ebene mit diesem Strahle darstellen.

Die Faktoren ϱ', ϱ, σ', σ werden wir später bestimmen.

74. Wir können die letzten Formeln, da sie projektivischer Natur sind, auch auf die unendlich ferne Ebene anwenden und erhalten in

$$\begin{array}{llll} \cdot & \omega_2\pi_{34} & + \omega_3\pi_{42} & + \omega_4\pi_{23} \\ \omega_1\pi_{43} & \cdot & + \omega_3\pi_{14} & + \omega_4\pi_{31} \\ \omega_1\pi_{24} & + \omega_2\pi_{41} & \cdot & + \omega_4\pi_{12} \\ \omega_1\pi_{32} & + \omega_2\pi_{13} & + \omega_3\pi_{21} & \cdot \end{array} \qquad (142)$$

und

$$\begin{array}{llll} \cdot & p_{12}\omega_2 & + p_{13}\omega_3 & + p_{14}\omega_4 \\ p_{21}\omega_1 & \cdot & + p_{23}\omega_3 & + p_{24}\omega_4 \\ p_{31}\omega_1 & + p_{32}\omega_2 & \cdot & + p_{34}\omega_4 \\ p_{41}\omega_1 & + p_{42}\omega_2 & + p_{43}\omega_3 & \cdot \end{array} \qquad (143)$$

Ausdrücke, welche den Richtungskoordinaten des Strahles proportional sind. Durch die folgenden Betrachtungen erhalten wir auch den zugehörigen Proportionalitätsfaktor.

Der Punkt P oder x_a bilde mit den Dreiecken f_1, f_2, f_3, f_4 Tetraeder, deren sechsfachen Volumen V_1, V_2, V_3, V_4 seien. Dabei entstehe das Tetraeder V_a dadurch aus dem Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$, dass an Stelle der a^{ten} Ecke der Punkt P trete. Es hat dann das Tetraeder V_a mit δ_a das gleiche Vorzeichen, wenn P mit dem Einheitspunkt auf der gleichen Seite der Fläche A_a liegt. Man hat daher auch dem Vorzeichen nach

$$V_a : \delta_a = p_a : e_a = x_a ,$$

also

$$V_a = \delta_a x_a . \qquad (144)$$

In ähnlicher Weise bestimme der Punkt Q oder y_a die Tetraeder, deren sechsfache Volumen W_1, W_2, W_3, W_4 seien, so dass auch hier

$$W_a = \delta_a y_a$$

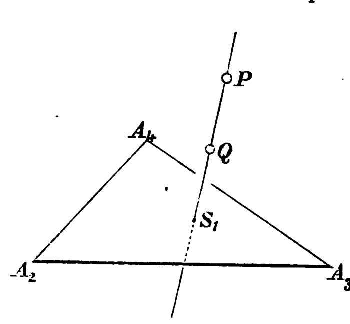
ist. Wir bezeichnen ferner mit

$$V_{ab}$$

das sechsfache Volumen des Tetraeders, welches von den Punkten P, Q, A_a, A_b gebildet wird. Man hat dann auch mit Rücksicht auf das Vorzeichen

$$V_1 - W_1 = \delta_1 (x_1 - y_1) = V_{34} + V_{42} + V_{23}.$$

Setzt man nämlich voraus, dass die Punkte P und Q mit E auf einer Seite der Ebene A_1 liegen, dass die Gerade PQ diese Ebene innerhalb des Dreiecks $A_2\,A_3\,A_4$ schneide und dass P von dieser Ebene weiter entfernt sei als Q, so wird $V_1 > W_1$, $x_1 > y_1$ und werden die Volumen V_{34}, V_{42}, V_{23} positiv, da ein Beobachter, der so in der Geraden PQ liegt, dass die Richtung PQ mit der Richtung von Fuss zu Kopf übereinstimmt, sich von links nach rechts wenden muss, wenn er mit dem Blicke den Kantenzug $A_3\,A_4\,A_2\,A_3$ verfolgen will. In diesem Falle ist die Richtigkeit der obigen Formel evident. Vertauschen aber P und Q ihre Lagen, so vertauschen sich auch gleichzeitig V_1 und W_1, x_1 und y_1, während die Grössen V_{ab} ihre Zeichen wechseln; die obige Formel gilt also auch in diesem Falle. Wenn sich der Punkt Q auf der Geraden PQ so bewegt, dass er endlich die Ebene A_1 überschreitet, so ändern W_1 und y_1 gleichzeitig ihre Zeichen, ohne dass dabei die Richtigkeit der Formel geändert würde. Ändert sich endlich die Lage der Geraden PQ derart, dass ihr Spurpunkt S_1 etwa die Kante $A_2\,A_3$ überschreitet, so wird in der obigen Formel $|V_{23}|$ zu subtrahieren sein; gleichzeitig wird aber auch V_{23} nach unsern Vereinbarungen negativ, so dass doch die obige Formel erhalten bleibt.



Wir erhalten so die unter allen Umständen richtigen Gleichungen

$$\begin{aligned}
V_1 - W_1 &= \delta_1 (x_1 - y_1) = \cdot \quad V_{34} + V_{42} + V_{23} \\
V_2 - W_2 &= \delta_2 (x_2 - y_2) = V_{43} \quad \cdot + V_{14} + V_{31} \\
V_3 - W_3 &= \delta_3 (x_3 - y_3) = V_{24} + V_{41} \quad \cdot + V_{12} \\
V_4 - W_4 &= \delta_4 (x_4 - y_4) = V_{32} + V_{13} + V_{21} \quad \cdot
\end{aligned} \tag{145}$$

und zur Kontrolle

$$\Delta - \Delta = \delta_1 (x_1 - y_1) + \delta_2 (x_2 - y_2) + \delta_3 (x_3 - y_3) + \delta_4 (x_4 - y_4) = 0,$$

da ja

$$V_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + V_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} = 0.$$

Es ist nun weiter nach (59)

$$V_{12} = \Delta\, \omega_1\, \omega_2\, \omega_3\, \omega_4 \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_2} & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$= - \Delta\, \omega_3\, \omega_4\, p'_{34}$$

und allgemeiner

$$- V_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \Delta\, \omega_{\mathfrak{c}}\, \omega_{\mathfrak{d}}\, p'_{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}, \tag{146}$$

wo $\mathfrak{a\,b\,c\,d}$ eine gerade Permutation von 1 2 3 4 ist. Setzt man diese Werte in (145) ein und ersetzt noch $x_{\mathfrak{a}} - y_{\mathfrak{a}}$ durch $- u'_{\mathfrak{a}}$, so erhält man die Formeln

$$\left.\begin{aligned} u'_1 &= \quad \cdot \quad + p'_{12}\,\omega_2 + p'_{13}\,\omega_3 + p'_{14}\,\omega_4 \\ u'_2 &= p'_{21}\,\omega_1 \quad \cdot \quad + p'_{23}\,\omega_3 + p'_{24}\,\omega_4 \\ u'_3 &= p'_{31}\,\omega_1 + p'_{32}\,\omega_2 \quad \cdot \quad + p'_{34}\,\omega_4 \\ u'_4 &= p'_{41}\,\omega_1 + p'_{42}\,\omega_2 + p'_{43}\,\omega_3 \quad \cdot \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

Der Herleitung dieser Formeln gemäss beziehen sich die $p'_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ auf die gleiche Distanz d des definierenden Punktepaares wie die Grössen $u'_{\mathfrak{a}}$. Teilen wir demnach die obigen Formeln durch d oder nehmen die Punkte $x_{\mathfrak{a}}$ und $y_{\mathfrak{a}}$ in der Distanz Eins an, so gehen die $p'_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ in die genauen $p_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ und gleichzeitig die $u'_{\mathfrak{a}}$ in die wahren Richtungskoordinaten $u_{\mathfrak{a}}$ des betreffenden Strahles über. Es ist daher

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \quad \cdot \quad + p_{12}\,\omega_2 + p_{13}\,\omega_3 + p_{14}\,\omega_4 \\ u_2 &= p_{21}\,\omega_1 \quad \cdot \quad + p_{23}\,\omega_3 + p_{24}\,\omega_4 \\ u_3 &= p_{31}\,\omega_1 + p_{32}\,\omega_2 \quad \cdot \quad + p_{34}\,\omega_4 \\ u_4 &= p_{41}\,\omega_1 + p_{42}\,\omega_2 + p_{43}\,\omega_3 \quad \cdot \end{aligned}\right\} \tag{148}$$

Demnach ändern sich die Werte $u_{\mathfrak{a}}$ nicht, wenn man von einem Strahle zu einem parallelen Strahle übergeht. Auch die $u'_{\mathfrak{a}}$ der Formeln (147) ändern sich bei einem solchen Übergange nicht, wenn man nur dafür Sorge trägt, dass die Distanz des den Strahl bestimmenden Punktepaares sich nicht ändert.

Auch die Werte v'_a der Gleichungen

$$\begin{aligned} v'_1 &= \cdot \quad \omega_2 \pi'_{34} + \omega_3 \pi'_{42} + \omega_4 \pi'_{23} \\ v'_2 &= \omega_1 \pi'_{43} \quad \cdot \quad + \omega_3 \pi'_{14} + \omega_4 \pi'_{31} \\ v'_3 &= \omega_1 \pi'_{24} + \omega_2 \pi'_{41} \quad \cdot \quad + \omega_4 \pi'_{12} \\ v'_4 &= \omega_1 \pi'_{32} + \omega_2 \pi'_{13} + \omega_3 \pi'_{21} \quad \cdot \end{aligned} \tag{149}$$

ändern sich nicht, wenn man von einem Strahle π'_{ab} zu einem parallelen $\pi^{*\prime}_{ab}$ übergeht und der Winkel der definierenden Ebenen bei π'_{ab} und $\pi^{*\prime}_{ab}$ derselbe ist. Nehmen wir nämlich statt der Ebenen ξ_a und η_a die denselben parallelen Ebenen

$$\begin{aligned} \xi^*_a &= \xi_a - \lambda \omega_a, \\ \eta^*_a &= \eta_a - \mu \omega_a, \end{aligned}$$

so bilden diese Ebenen den gleichen Winkel und bestimmen den parallelen Strahl $\pi^{*\prime}_{ab}$ von derselben positiven Richtung. Bezeichnet man für denselben die den v'_a entsprechenden Grössen mit $v^{*\prime}_a$, so ist z. B.

$$\begin{aligned} v^{*\prime}_1 &= \omega_2 \pi^{*\prime}_{34} + \omega_3 \pi^{*\prime}_{42} + \omega_4 \pi^{*\prime}_{23} \\ &= \begin{vmatrix} \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \eta^*_2 & \eta^*_3 & \eta^*_4 \\ \xi^*_2 & \xi^*_3 & \xi^*_4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{vmatrix} \\ &= v'_1, \end{aligned}$$

w. z. b. w. Nehmen wir speziell die definierenden Ebenen normal, so gehen die π'_{ab} in die wahren Koordinaten des Strahles über und die Grössen v_a der Gleichungen

$$\begin{aligned} v_1 &= \cdot \quad \omega_2 \pi_{34} + \omega_3 \pi_{42} + \omega_4 \pi_{23} \\ v_2 &= \omega_1 \pi_{43} \quad \cdot \quad + \omega_3 \pi_{14} + \omega_4 \pi_{31} \\ v_3 &= \omega_1 \pi_{24} + \omega_2 \pi_{41} \quad \cdot \quad + \omega_4 \pi_{12} \\ v_4 &= \omega_1 \pi_{32} + \omega_2 \pi_{13} + \omega_3 \pi_{21} \quad \cdot \end{aligned} \tag{150}$$

ändern sich beim Übergang zu einem parallelen Strahl auch nicht um einen gemeinsamen Multiplikator.

Diese Bemerkung ist insofern von Wichtigkeit, als infolge derselben die Gleichung

$$\pi_{ab} = \tau \cdot p_{cb}$$

übergeht in

$$v_a = \tau \cdot u_a \tag{151}$$

und die Aufgabe der Bestimmung von τ auf die der Bestimmung des Verhältnisses der Werte v_a und u_a zurückgeführt wird.

Sind die Koordinaten p_{ab} eines Strahls gegeben, so können wir nach (148) die Koordinaten der positiven Richtung berechnen und damit nach Art. 52 diese positive Richtung selbst angeben.

75. Wir können die Koordinaten p_{ab} eines Strahles auch aus einem Punkte x_a und der Richtung u_a bestimmen. Bilden wir nämlich aus der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{matrix} \right\|$$

die zweigliedrigen Determinanten, so erhalten wir wieder die p_{ab}. Es ist z. B. nach (148) und (134)

$$\begin{aligned} u_1 x_2 - u_2 x_1 &= (p_{12}\omega_2 + p_{13}\omega_3 + p_{14}\omega_4) x_2 - (p_{21}\omega_1 + p_{23}\omega_3 + p_{24}\omega_4) x_1 \\ &= p_{12}(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2) + p_{12}\omega_3 x_3 + p_{12}\omega_4 x_4 \\ &= p_{12}, \end{aligned}$$

d. h. ein im Endlichen gelegener Punkt eines Strahls und seine Richtung liefern genau die gleichen Strahlenkoordinaten, wie zwei Punkte in der Entfernung „Eins“. Man kann daher auch die durch

$$p_{ab} = u_a x_b - u_b x_a \tag{152}$$

definierten Grössen als die wahren Koordinaten erster Art eines Strahles auffassen.

Der im Endlichen gelegene Punkt kann natürlich auf die so definierten Strahlenkoordinaten keinen Einfluss ausüben. In der That ändert die Substitution $x_a + r \cdot u_a$ für x_a den Ausdruck nicht.

76. Wir können nun zur Ableitung der Bedingungsgleichungen der Strahlenkoordinaten beider Arten übergehen. Für die erste Art hatten wir gefunden

$$u'_a = p'_{a1}\omega_1 + p'_{a2}\omega_2 + p'_{a3}\omega_3 + p'_{a4}\omega_4, \tag{153}$$

wobei sich die u'_a auf die gleiche Distanz d beziehen wie die p'_{ab}. Es ist daher

$$-d^2 = E(u') \tag{154}$$

oder

$$-d^2 = \sum_{ab} d^2_{ab}\,\omega_a\,\omega_b\,(p'_{a1}\,\omega_1 + p'_{a2}\,\omega_2 + \cdot\cdot)(p'_{b1}\,\omega_1 + p'_{b2}\,\omega_2 + \cdot\cdot). \tag{155}$$

Diese Gleichung hat die folgende Bedeutung. Nehmen wir irgend sechs Zahlen p'_{ab}, welche der Gleichung

$$p'_{23}\, p'_{14} + p'_{31}\, p'_{24} + p'_{12}\, p'_{34} = 0$$

genügen, so können wir dieselben als die Proportionalkoordinaten eines Strahles auffassen. Dann liefert (155) die Distanz d des Punktepaares, aus dessen Koordinaten wir die p'_{ab} entstanden denken können.

Nehmen wir statt der p'_{ab} die wahren Koordinaten p_{ab}, so wird $d = 1$ und die Gleichungen (154) und (155) werden

$$-1 = E(u) \tag{156}$$

und

$$-1 = \sum_{ab} d_{ab}^2\, \omega_a\, \omega_b\, (p_{a1}\, \omega_1 + p_{a2}\, \omega_2 + \cdot\cdot)\, (p_{b1}\, \omega_1 + p_{b2}\, \omega_2 + \cdot\cdot) \tag{157}$$

Dies ist die gesuchte Bedingungsgleichung, der die genauen Strahlenkoordinaten erster Art genügen. Wir schreiben sie in Zukunft in der einfachen Form

$$-1 = E(u).$$

Die Frage nach der Bedeutung der Gleichung

$$0 = E(u)$$

ist sofort erledigt. Da, wenn wir $E(u)$ als Funktion der u_a betrachten, diese Gleichung den absoluten Kugelkreis darstellt, so wird diese Gleichung, $E(u)$ als Funktion der p_{ab} betrachtet, den Komplex zweiten Grades darstellen, der aus den Sekanten dieses Kegelschnittes besteht; d. h. den Komplex der sogenannten „Minimalgeraden“. Die Gleichung $E(u) = 0$ drückt aus, dass jede Strecke auf einer solchen Minimalgeraden die „Länge“ Null hat.

77. Um nun die Bedingungsgleichung der Strahlenkoordinaten zweiter Art zu erhalten, müssen wir den Sinus des Winkels φ zweier Ebenen ξ_a und η_a durch die Koordinaten π'_{ab} des Schnittstrahls der beiden Ebenen ausdrücken. Wir gehen zu diesem Zwecke aus von den Formeln

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 = W(\xi \mid \xi), \quad \left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 = W(\eta \mid \eta)$$

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \cos\varphi = W(\xi \mid \eta)$$

und bilden den Ausdruck

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^4 \sin^2\varphi = W(\xi \mid \xi) \cdot W(\eta \mid \eta) - W^2(\xi \mid \eta) \equiv S. \tag{158}$$

In der folgenden Rechnung soll mit

$$\sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}}$$

angedeutet werden, dass über $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ unabhängig von einander von 1 bis 4 summiert werden soll, dagegen mit

$$\sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}\mathfrak{a}},$$

dass über die Kombinationen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 23,\ 31,\ 12,\ 14,\ 24,\ 34,$$
$$32,\ 13,\ 21,\ 41,\ 42,\ 43,$$

und endlich mit

$$\sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}},$$

dass nur über die Kombinationen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 23,\ 31,\ 12,\ 14,\ 24,\ 34$$

summiert werden soll. Es ist dann

$$S = \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{D_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}}}{\delta_{\mathfrak{a}}\delta_{\mathfrak{p}}} \xi_{\mathfrak{a}} \xi_{\mathfrak{p}} \cdot \sum_{\mathfrak{b}} \sum_{\mathfrak{q}} \frac{D_{\mathfrak{b}\mathfrak{q}}}{\delta_{\mathfrak{b}}\delta_{\mathfrak{q}}} \eta_{\mathfrak{b}} \eta_{\mathfrak{q}}$$
$$- \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{q}} \frac{D_{\mathfrak{a}\mathfrak{q}}}{\delta_{\mathfrak{a}}\delta_{\mathfrak{q}}} \xi_{\mathfrak{a}} \eta_{\mathfrak{q}} \cdot \sum_{\mathfrak{b}} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{D_{\mathfrak{b}\mathfrak{p}}}{\delta_{\mathfrak{b}}\delta_{\mathfrak{p}}} \eta_{\mathfrak{b}} \xi_{\mathfrak{p}}$$
$$= \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\mathfrak{q}} \frac{D_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}} D_{\mathfrak{b}\mathfrak{q}} - D_{\mathfrak{a}\mathfrak{q}} D_{\mathfrak{b}\mathfrak{p}}}{\delta_{\mathfrak{a}}\delta_{\mathfrak{b}}\delta_{\mathfrak{p}}\delta_{\mathfrak{q}}} \xi_{\mathfrak{a}} \eta_{\mathfrak{b}} \xi_{\mathfrak{p}} \eta_{\mathfrak{q}}.$$

Da nun der Koeffizient

$$\frac{D_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}} D_{\mathfrak{b}\mathfrak{q}} - D_{\mathfrak{a}\mathfrak{q}} D_{\mathfrak{b}\mathfrak{p}}}{\delta_{\mathfrak{a}}\delta_{\mathfrak{b}}\delta_{\mathfrak{p}}\delta_{\mathfrak{q}}} \tag{159}$$

den Wert Null hat, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ ist, so können wir diese Fälle bei der Summation übergehen und demgemäss schreiben

$$S = \sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}^{\mathfrak{q}\mathfrak{p}} \frac{D_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}} D_{\mathfrak{b}\mathfrak{q}} - D_{\mathfrak{a}\mathfrak{q}} D_{\mathfrak{b}\mathfrak{p}}}{\delta_{\mathfrak{a}}\delta_{\mathfrak{b}}\delta_{\mathfrak{p}}\delta_{\mathfrak{q}}} \xi_{\mathfrak{a}} \eta_{\mathfrak{b}} \xi_{\mathfrak{p}} \eta_{\mathfrak{q}}.$$

Vertauscht man $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$, so ändert der Koeffizient (159) sein Vorzeichen. Es lassen sich daher die Glieder mit $\xi_{\mathfrak{a}}\eta_{\mathfrak{b}}$ und $\xi_{\mathfrak{b}}\eta_{\mathfrak{a}}$ in ein Glied mit dem Faktor

$$\xi_{\mathfrak{a}}\eta_{\mathfrak{b}} - \xi_{\mathfrak{b}}\eta_{\mathfrak{a}} = -\pi'_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$$

zusammenziehen. Da man dieselbe Bemerkung in Bezug auf $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ machen kann, so erhält man schliesslich

$$S = \sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \sum_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} (D_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}} D_{\mathfrak{b}\mathfrak{q}} - D_{\mathfrak{a}\mathfrak{q}} D_{\mathfrak{b}\mathfrak{p}}) \frac{\pi'_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \pi'_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}}{\delta_{\mathfrak{a}}\delta_{\mathfrak{b}}\delta_{\mathfrak{p}}\delta_{\mathfrak{q}}}.$$

Nach einem bekannten Satze (vgl. z. B. Baltzer, Determinanten. 4. Aufl. § 7. 2) ist nun

$$16 \begin{vmatrix} D_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}} & D_{\mathfrak{a}\mathfrak{q}} \\ D_{\mathfrak{b}\mathfrak{p}} & D_{\mathfrak{b}\mathfrak{q}} \end{vmatrix} = 8\triangle^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & d_{\mathfrak{c}\mathfrak{r}}^2 & d_{\mathfrak{c}\mathfrak{s}}^2 \\ 1 & d_{\mathfrak{d}\mathfrak{r}}^2 & d_{\mathfrak{d}\mathfrak{s}}^2 \end{vmatrix}$$

oder

$$D_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}} D_{\mathfrak{b}\mathfrak{q}} - D_{\mathfrak{a}\mathfrak{q}} D_{\mathfrak{b}\mathfrak{p}} = \tfrac{1}{2} \triangle^2 (d_{\mathfrak{c}\mathfrak{s}}^2 + d_{\mathfrak{d}\mathfrak{r}}^2 - d_{\mathfrak{c}\mathfrak{r}}^2 - d_{\mathfrak{d}\mathfrak{s}}^2),$$

wobei $\mathfrak{c}$ $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{r}$ $\mathfrak{s}$ diejenigen Zahlen sind, für welche

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{q} & \mathfrak{r} & \mathfrak{s} \end{matrix}$$

gerade Permutationen von 1 2 3 4 werden. Setzen wir dies ein, so ergiebt sich

$$S = \tfrac{1}{2} \triangle^2 \sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \sum_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} (d_{\mathfrak{c}\mathfrak{s}}^2 + d_{\mathfrak{d}\mathfrak{r}}^2 - d_{\mathfrak{c}\mathfrak{r}}^2 - d_{\mathfrak{d}\mathfrak{s}}^2) \frac{\pi'_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \pi'_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}}{\delta_{\mathfrak{a}} \delta_{\mathfrak{b}} \delta_{\mathfrak{p}} \delta_{\mathfrak{q}}}$$

oder

$$\nabla^2 \cdot S = \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \sum_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} (d_{\mathfrak{c}\mathfrak{s}}^2 + d_{\mathfrak{d}\mathfrak{r}}^2 - d_{\mathfrak{c}\mathfrak{r}}^2 - d_{\mathfrak{d}\mathfrak{s}}^2)\, \omega_{\mathfrak{c}} \omega_{\mathfrak{d}} \omega_{\mathfrak{r}} \omega_{\mathfrak{s}} \pi'_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \pi'_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}.$$

Um diesen Ausdruck noch weiter umformen zu können, müssen wir ihn einmal vollständig anschreiben

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \cdot S = {} & d_{14}^2 \omega_1^2 \omega_4^2 \pi_{23}'^2 + d_{24}^2 \omega_2^2 \omega_4^2 \pi_{31}'^2 + d_{34}^2 \omega_3^2 \omega_4^2 \pi_{12}'^2 \\
& + d_{23}^2 \omega_2^2 \omega_3^2 \pi_{14}'^2 + d_{31}^2 \omega_3^2 \omega_1^2 \pi_{24}'^2 + d_{12}^2 \omega_1^2 \omega_2^2 \pi_{33}'^2 \\
& + (d_{14}^2 + d_{24}^2 - d_{12}^2)\, \omega_1 \omega_2 \omega_4^2 \pi'_{23} \pi'_{31} + (d_{14}^2 + d_{34}^2 - d_{13}^2)\, \omega_1 \omega_3 \omega_4^2 \pi'_{23} \pi'_{12} \\
& + (d_{13}^2 + d_{14}^2 - d_{34}^2)\, \omega_1^2 \omega_3 \omega_4 \pi'_{23} \pi'_{42} + (d_{12}^2 + d_{14}^2 - d_{24}^2)\, \omega_1^2 \omega_2 \omega_4 \pi'_{23} \pi'_{34} \\
& + (d_{24}^2 + d_{34}^2 - d_{23}^2)\, \omega_2 \omega_3 \omega_4^2 \pi'_{31} \pi'_{12} + (d_{23}^2 + d_{24}^2 - d_{34}^2)\, \omega_2^2 \omega_3 \omega_4 \pi'_{31} \pi'_{14} \\
& + (d_{12}^2 + d_{24}^2 - d_{14}^2)\, \omega_1 \omega_2^2 \omega_4 \pi'_{31} \pi'_{43} + (d_{23}^2 + d_{34}^2 - d_{24}^2)\, \omega_2 \omega_3^2 \omega_4 \pi'_{12} \pi'_{41} \\
& + (d_{13}^2 + d_{34}^2 - d_{14}^2)\, \omega_1 \omega_3^2 \omega_4 \pi'_{12} \pi'_{24} + (d_{13}^2 + d_{23}^2 - d_{12}^2)\, \omega_1 \omega_2 \omega_3^2 \pi'_{14} \pi'_{42} \\
& + (d_{12}^2 + d_{23}^2 - d_{13}^2)\, \omega_1 \omega_2^2 \omega_3 \pi'_{14} \pi'_{43} + (d_{12}^2 + d_{13}^2 - d_{23}^2)\, \omega_1^2 \omega_2 \omega_3 \pi'_{24} \pi'_{43} \\
& + (d_{13}^2 + d_{24}^2 - d_{12}^2 - d_{34}^2)\, \omega_1\, \omega_2\, \omega_3\, \omega_4\, \pi'_{23} \pi'_{14} \\
& + (d_{12}^2 + d_{34}^2 - d_{23}^2 - d_{14}^2)\, \omega_1\, \omega_2\, \omega_3\, \omega_4\, \pi'_{31} \pi'_{24} \\
& + (d_{14}^2 + d_{23}^2 - d_{13}^2 - d_{24}^2)\, \omega_1\, \omega_2\, \omega_3\, \omega_4\, \pi'_{12} \pi'_{34}.
\end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung ersehen wir, dass z. B. der Koeffizient von d_{23}^2 gleich

$$\omega_2\,\omega_3\,(\omega_2\,\omega_3\,\pi'^2_{14} + \omega_4^2\,\pi'_{13}\,\pi'_{12} + \omega_2\,\omega_4\,\pi'_{31}\,\pi'_{14} + \omega_3\,\omega_4\,\pi'_{12}\,\pi'_{41}$$
$$+ \omega_1\,\omega_3\,\pi'_{14}\,\pi'_{42} + \omega_1\,\omega_2\,\pi'_{14}\,\pi'_{43} + \omega_1^2\,\pi'_{42}\,\pi'_{43} + \omega_1\,\omega_4\,\pi'_{13}\,\pi_{24} + \omega_1\,\omega_4\,\pi'_{12}\,\pi'_{34})$$
$$= -\,\omega_2\,\omega_3\,v'_2\,v'_3$$

ist, wo v'_a die in (149) definierten Werte sind. Allgemein ist der Koeffizient von d^2_{ab}

$$-\,\omega_a\,\omega_b\,v'_a\,v'_b\,,$$

so dass der obige Ausdruck gerade gleich

$$-\,E\,(v')$$

ist. Die Gleichung (158) lautet somit

$$\nabla^2\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^4 \sin^2\varphi = -\,E\,(v'). \tag{160}$$

Die vorstehende Gleichung hat folgende Bedeutung. Nimmt man sechs Zahlen π'_{ab}, welche der Gleichung

$$\pi'_{23}\,\pi'_{14} + \pi'_{31}\,\pi'_{24} + \pi'_{12}\,\pi_{34} = 0$$

genügen, so können wir annehmen, sie seien den genauen Koordinaten π_{ab} eines Strahles proportional. Dann liefert die Gleichung (160) den Winkel φ, unter dem wir die Ebenen ξ_a und η_a anzunehmen haben, damit ihre Koordinaten gerade die Determinanten π'_{ab} liefern. Sind daher die π'_{ab} die genauen Koordinaten π_{ab}, so wird $\varphi = 90^0$ und gleichzeitig gehen die v'_a in die v_a der Gleichungen (150) über. Die Bedingungsgleichung der Strahlenkoordinaten zweiter Art lautet somit

$$\nabla^2\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^4 = -\,E\,(v). \tag{161}$$

78. Nach Aufstellung der beiden Bedingungsgleichungen für die Strahlenkoordinaten beider Arten können wir nun den Proportionalitätsfaktor τ berechnen, mit dem man die p_{ab} zu multiplizieren hat, damit sie in die entsprechenden π_{cb} übergehen. Es folgt nämlich aus

$$\tau\,p_{ab} = \pi_{cb}$$

nach den Gleichungen (148) und (150)

$$\tau\,u_a = v_a$$

und daraus mit Hülfe von (161) und (156)

$$\nabla^2\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^4 = -\,E\,(\tau\cdot u) = -\,\tau^2\,E(u) = +\,\tau^2.$$

Es ist daher

$$\tau = \pm \nabla \cdot \left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2.$$

Dabei ist noch zu entscheiden, ob das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist. Da bei stetiger Aenderung der Lage des Strahls der konstante Faktor τ nicht plötzlich sein Zeichen wechseln kann, so genügt ein Beispiel, um diese Frage zu entscheiden. Wir wählen dazu den Strahl $A_1 A_2$.

Als Verbindungslinie der Punkte A_1 und A_2 hat $A_1 A_2$ die Koordinate

$$p_{12} = -\frac{1}{\omega_1 \omega_2 d_{12}},$$

während alle andern Koordinaten p_{ab} den Wert Null haben. Wenn wir diesen Strahl als Schnittlinie der Ebenen $\mathbf{A}_3$ und $\mathbf{A}_4$ auffassen, so hat er mit dem erstgenannten die gleiche positive Richtung, und es ist

$$\pi_{34} = -\frac{h_3 h_4}{\varepsilon_3 \varepsilon_4 \sin(34)},$$

während alle andern Koordinaten p_{ab} den Wert Null haben. Da nun p_{12} und π_{34} das gleiche Zeichen haben, muss τ positiv sein. Wir schliessen daraus allgemein:

Fassen wir einen Strahl sowol als Verbindungslinie zweier Punkte als auch als Schnittlinie zweier Ebenen auf, so ist der Faktor τ positiv oder negativ, je nachdem die beiden Auffassungen gleichen oder entgegengesetzten Richtungssinn des Strahles ergeben.

Durch die Gleichung

$$\tau = \nabla \cdot \left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \tag{162}$$

ist τ durch bekannte Grössen ausgedrückt. Da ∇ ein Volumen ist, so ist in der That τ eine lineare Grösse, wie es der Charakter der Grössen p_{ab} und π_{ab} verlangt.

Zufolge des eingeführten Wertes τ können wir nun die Bedingungsgleichung der Strahlenkoordinaten π_{ab} in der einfachern Form schreiben

$$-\tau^2 = E(v). \tag{163}$$

Die Gleichung

$$E(v) = 0$$

stellt natürlich den gleichen Komplex zweiten Grades dar, wie die Gleichung

$$E(u) = 0.$$

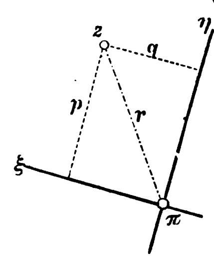
79. Wir können nun auch die in Art. 73 zurückgestellten Aufgaben der Bestimmung der Faktoren ϱ und σ erledigen.

Für die Verbindungsebene ζ_a eines Punktes z_a mit einem Strahle π_{ab} hatten wir in (139)

$$\varrho\,\zeta_a = \pi_{a1} z_1 + \pi_{a2} z_2 + \pi_{a3} z_3 + \pi_{a4} z_4.$$

Da nun

$$\begin{aligned}\varrho\,\zeta_a &= z_1(\eta_a \xi_1 - \eta_1 \xi_a) + z_2(\eta_a \xi_2 - \eta_2 \xi_a) + \cdots \\ &= \eta_a(z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2 + \cdots) - \xi_a(z_1 \eta_1 + z_2 \eta_2 + \cdots) \\ &= \frac{4}{\varepsilon_0}(\eta_a p - \xi_a q)\end{aligned}$$



ist, wobei p und q die Abstände des Punktes z_a von den normalen Ebenen ξ_a und η_a bedeuten, so ist nach der Bedingungsgleichung für Ebenenkoordinaten

$$\begin{aligned}\varrho^2 &= W(\eta p - \xi q \mid \eta p - \xi q) \\ &= p^2 \cdot W(\eta \mid \eta) + q^2 \cdot W(\xi \mid \xi) - 2pq \cdot W(\xi \mid \eta).\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist Null, da die beiden Ebenen ξ_a und η_a normal aufeinander stehen; die beiden ersten Summanden ergeben je $\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2$. Es ist daher

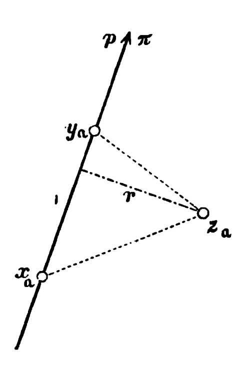
$$\varrho^2 = \left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 (p^2 + q^2) = \left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 r^2$$

oder

$$\varrho = \pm \frac{4}{\varepsilon_0} \cdot r\,, \tag{164}$$

wenn r der Abstand des Punktes z_a von dem Strahle π_{ab} ist. Damit ist die Berechnung des Proportionalitätsfaktors ϱ zurückgeführt auf die Berechnung des Abstandes r eines Punktes von einer Geraden.

Zu derselben Formel gelangen wir auch, wenn wir die Koordinaten der Verbindungsebene von z_a mit p_{ab} nach Art. 64 berechnen. Nach demselben ist



$$\zeta_a = \frac{4}{\varepsilon_0}\frac{\nabla}{s}\cdot\zeta_a',$$

wo die ζ_a' die Unterdeterminanten der letzten Zeile von

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

sind und s die doppelte Fläche des Dreiecks x_a, y_a, z_a ist. Da nun

$$s = r,$$

$$\begin{aligned} \zeta_1' &= \quad \cdot \qquad z_2\,p_{34} + z_3\,p_{42} + z_4\,p_{23}, \\ \zeta_2' &= z_1\,p_{43} \quad \cdot \quad + z_3\,p_{14} + z_4\,p_{31}, \\ \zeta_3' &= z_1\,p_{24} + z_2\,p_{41} \quad \cdot \quad + z_4\,p_{12}, \\ \zeta_4' &= z_1\,p_{32} + z_2\,p_{13} + z_3\,p_{21} \quad \cdot \quad, \end{aligned}$$

ferner

$$\tau\,p_{ab} = \left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \nabla\cdot p_{ab} = \pi_{cd}, \quad (a\,b\,c\,d = +)$$

so ist

$$\frac{4}{\varepsilon_0}\cdot r\cdot\zeta_a = \pi_{a1}\,z_1 + \pi_{a2}\,z_2 + \pi_{a3}\,z_3 + \pi_{a4}\,z_4, \tag{165}$$

übereinstimmend mit dem ersten Resultat. Sind die Vorzeichen der ζ_a nach dieser Formel bestimmt, so ist nach Herleitung die positive Seite der Verbindungsebene diejenige, von der aus der Strahl mit seiner positiven Richtung im Sinne der Uhrzeiger um den Punkt z_a dreht.

Da die ζ_a der Bedingungsgleichung für Ebenenkoordinaten genügen müssen, erhalten wir zur Berechnung von r die Formel

$$r^2 = -\left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^4 \sum_{ab} \frac{D_{ab}}{\delta_a\,\delta_b}(\pi_{a1}\,z_1 + \pi_{a2}\,z_2 + \cdots)(\pi_{b1}\,z_1 + \pi_{b2}\,z_2 + \cdots). \tag{166}$$

80. Falls der Punkt z_a im Unendlichen liegt, haben wir die Aufgabe, einen Strahl π_{ab} mit einer Richtung u_a zu verbinden. Für die Verbindungsebene ζ_a hat man jedenfalls

$$\varrho''\,\zeta_a = \pi_{a1}\,u_1 + \pi_{a2}\,u_2 + \pi_{a3}\,u_3 + \pi_{a4}\,u_4; \tag{167}$$

denn erstens ist

$$\varrho''\,(u_1\,\zeta_1 + u_2\,\zeta_2 + u_3\,\zeta_3 + u_4\,\zeta_4) = 0,$$

also, weil $\varrho'' \neq 0$ ist,

$$u_1 \zeta_1 + u_2 \zeta_2 + u_3 \zeta_3 + u_4 \zeta_4 = 0,$$

d. h. die Ebene ζ_a ist der Richtung u_a parallel und zweitens folgen aus (167) leicht die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \quad \cdot \quad \zeta_2 \pi_{34} + \zeta_3 \pi_{42} + \zeta_4 \pi_{23}, \\ 0 &= \zeta_1 \pi_{43} \quad \cdot \quad + \zeta_3 \pi_{14} + \zeta_4 \pi_{31}, \end{aligned}$$

welche nach Artikel 72 die Incidenz der Ebene ζ_a und des Strahles π_{ab} ausdrücken. Zur Bestimmung von ϱ'' benützen wir die Gleichung

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 = W(\zeta \mid \zeta).$$

Da nach (116)

$$\begin{aligned} \varrho'' \cdot \zeta_a &= u_1 (\eta_a \xi_1 - \eta_1 \xi_a) + u_2 (\eta_a \xi_2 - \eta_2 \xi_a) + \cdots \\ &= \eta_a (u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + \cdots) - \xi_a (u_1 \eta_1 + u_2 \eta_2 + \cdots) \\ &= \frac{4}{\varepsilon_0} \left[\eta_a \sin(u, \xi) - \xi_a \sin(u, \eta)\right], \end{aligned}$$

so ergiebt diese Gleichung

$$\begin{aligned} \varrho''^2 &= W[\eta_a \sin(u, \xi) - \xi_a \sin(u, \eta) \mid \eta_a \sin(u, \xi) - \xi_a \sin(u, \eta)] \\ &= \sin^2(u, \xi) W(\eta \mid \eta) + \sin^2(u, \eta) W(\xi \mid \xi) - 2 \sin(u, \xi) \sin(u, \eta) W(\xi \mid \eta). \end{aligned}$$

Da nun der letzte Summand infolge der Normalität von ξ_a und η_a den Wert Null hat und die ersten Summanden den Wert $\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2$ ergeben, so ist

$$\varrho''^2 = \left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \left(\sin^2(u, \xi) + \sin^2(u, \eta)\right). \tag{168}$$

Bildet ein Strahl mit zwei normalen Ebenen die Neigungswinkel α und β und mit der Schnittlinie derselben den Winkel γ, so ist

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma.$$

Wendet man diese Formel auf (168) an, so ergiebt sich

$$\varrho'' = \frac{4}{\varepsilon_0} \sin \varphi, \tag{169}$$

wenn φ der Winkel der Richtung u_a mit dem Strahle π_{ab} ist, welcher sich nach (65) berechnen lässt.

Sind die Koordinatenvorzeichen der Verbindungsebene in der angedeuteten Weise fixiert, so bestimmt man die positive Seite derselben, wie man sich leicht an einem Beispiel überzeugen kann, folgendermassen. Die positive Richtung des Strahles π_{ab} kann durch Drehung um einen hohlen Winkel in die positive Richtung von u_a

gebracht werden; diejenige Seite der Ebene ζ_α, von der aus diese Drehung im positiven Sinne erfolgt, ist die positive Seite dieser Ebene.

81. Weiter haben wir in Artikel 73 durch die Formel

$$\sigma\, z_\alpha = p_{\alpha 1}\, \zeta_1 + p_{\alpha 2}\, \zeta_2 + p_{\alpha 3}\, \zeta_3 + p_{\alpha 4}\, \zeta_4$$

die Koordinaten z_α des Punktes bestimmt, in welchem der Strahl $p_{\alpha\beta}$ die Ebene ζ_α schneidet. Um σ zu berechnen, multipliziert man diese Formel mit ω_α und summiert über α. Man erhält nach (148)

$$\begin{aligned}\sigma &= -(\zeta_1\, u_1 + \zeta_2\, u_2 + \zeta_3\, u_3 + \zeta_4\, u_4)\\ &= -\frac{4}{\varepsilon_0}\sin\varphi, \qquad (170)\end{aligned}$$

wenn φ der nach Art. 59 bestimmte Neigungswinkel des Strahles $p_{\alpha\beta}$ gegen die Ebene ζ_α ist.

Bei einem simultanen Zeichenwechsel der ζ_α oder $p_{\alpha\beta}$ und u_α geht nach Art. 59 der Winkel φ in $-\varphi$ über. Es sind daher die z_α vollständig bestimmte Grössen, wie es der Charakter des Punktes als einseitiges Gebilde erfordert (vergl. Art. 51).

82. Anschliessend an die letzten Betrachtungen können wir nun auch die genauen Koordinaten x_α des Schnittpunktes dreier Ebenen ξ_α, η_α, ζ_α berechnen. Bezeichnen nämlich x'_α die Subdeterminanten der letzten Zeile von

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

so ist

$$\sigma \cdot x_\alpha = x'_\alpha,$$

und es ist σ so zu bestimmen, dass

$$\omega_1\, x_1 + \omega_2\, x_2 + \omega_3\, x_3 + \omega_4\, x_4 = 1$$

wird. Man erhält

$$\begin{aligned}\sigma &= \omega_1\, x'_1 + \omega_2\, x'_2 + \omega_3\, x'_3 + \omega_4\, x'_4\\ &= \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Um die geometrische Bedeutung dieser Determinante zu untersuchen, bezeichnen wir den Winkel der Ebenen ξ_a und η_a mit φ. Diese Ebenen schneiden sich in einer Geraden, deren Koordinaten π_{ab} seien, deren unendlich ferner Punkt die Koordinaten $v_a = \tau u_a$ habe und welche gegen die Ebene ζ_a unter dem Winkel ψ geneigt sei. Es ist dann

$$\pi_{ab} \cdot \sin \varphi = \eta_a \xi_b - \eta_b \xi_a,$$

$$\begin{aligned}
\tau u_1 &= v_1 = \quad \cdot \quad \omega_2 \pi_{34} + \omega_3 \pi_{42} + \omega_4 \pi_{23} \\
\tau u_2 &= v_2 = \omega_1 \pi_{43} \quad \cdot \quad + \omega_3 \pi_{14} + \omega_4 \pi_{31} \\
\tau u_3 &= v_3 = \omega_1 \pi_{24} + \omega_2 \pi_{41} \quad \cdot \quad + \omega_4 \pi_{12} \\
\tau u_4 &= v_4 = \omega_1 \pi_{32} + \omega_2 \pi_{13} + \omega_3 \pi_{21} \quad \cdot \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\varepsilon_0} \tau \sin \psi &= \tau (\zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2 + \zeta_3 u_3 + \zeta_4 u_4) \\
&= \zeta_1 v_1 + \zeta_2 v_2 + \zeta_3 v_3 + \zeta_4 v_4 \\
&= -\frac{1}{\sin \varphi} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{\sigma}{\sin \varphi}.
\end{aligned}$$

Es ist somit

$$\begin{aligned}
\sigma &= -\frac{4}{\varepsilon_0} \cdot \tau \sin \varphi \sin \psi \\
&= -\frac{4}{\varepsilon_0} \cdot \tau \cdot S(\xi, \eta, \zeta),
\end{aligned} \tag{171}$$

wobei $S(\xi, \eta, \zeta)$ für die durch die Ebenen ξ_a, η_a, ζ_a gebildete Ecke eine ähnliche Bedeutung hat, wie der schon erwähnte Staudt'sche Sinus einer Ecke (vgl. z. B. Baltzer, Elem. d. Math. VI, § 5, 11 u. 12). Damit ist die geometrische Bedeutung von σ angegeben.

Betreff des Vorzeichens von $S(\xi, \eta, \zeta)$ ist aber noch folgendes zu bemerken. Bestimmt man die positiven Richtungen der Schnittlinien (η, ζ), (ζ, ξ) und (ξ, η) des Cyklus der drei Ebenen ξ_a, η_a, ζ_a nach Artikel 69, so kann man sich leicht von der Richtigkeit des Satzes überzeugen: Geht die positive Richtung des einen der drei Strahlen auf die positive (negative) Seite der dritten Ebene, so geschieht dies auch bei den beiden andern Strahlen. Vertauscht man im Cyklus zwei Ebenen, oder vertauscht man die beiden Seiten einer Ebene, so geht die eine Lagenbeziehung in die andere

über. Die Ecke der drei positiven Richtungen ist im ersten Falle linkswendig, im zweiten Falle rechtswendig. — Die vorstehende Entwicklung zeigt, dass im ersten Falle $S(\xi, \eta, \zeta)$ das positive, im zweiten Falle das negative Zeichen erhält. Es ist dann auch rücksichtlich des Vorzeichens

$$\sigma = -\frac{4}{\varepsilon_0}\tau \cdot S(\xi, \eta, \zeta).$$

83. Die Formeln (148) gestatten uns auch, den Winkel φ zweier Strahlen p_{ab} und p^*_{ab} (oder den Winkel eines Strahles und einer Richtung) zu berechnen. Denn nach (65) ist

$$-2\cos\varphi = E(u \mid u^*),$$

wenn

$$u_a = p_{a1}\omega_1 + p_{a2}\omega_2 + p_{a3}\omega_3 + p_{a4}\omega_4,$$
$$u^*_a = p^*_{a1}\omega_1 + p^*_{a2}\omega_2 + p^*_{a3}\omega_3 + p^*_{a4}\omega_4.$$

Damit können wir auch mittelbar den kürzesten Abstand k zweier Windschiefen angeben, da das Produkt aus k und $\sin\varphi$ oder das Moment der Windschiefen leicht berechnet werden kann. Definieren nämlich die beiden Punkte x_a, y_a von der Distanz Eins den ersten Strahl und ebenso die beiden Punkte x^*_a und y^*_a den zweiten Strahl, so ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x^*_1 & x^*_2 & x^*_3 & x^*_4 \\ y^*_1 & y^*_2 & y^*_3 & y^*_4 \end{vmatrix}$$

einerseits gleich

$$p_{23}p^*_{14} + p_{31}p^*_{24} + p_{12}p^*_{34} + p_{14}p^*_{23} + p_{24}p^*_{31} + p_{34}p^*_{12},$$

anderseits gleich

$$\frac{V}{\nabla} = \frac{1^2 M(p, p^*)}{\nabla},$$

so dass

$$M(p, p^*) = \nabla(p_{23}p^*_{14} + \cdots + p_{14}p^*_{23} + \cdots). \tag{172}$$

Das Moment wird positiv, wenn das obige Volumen positiv wird, d. h. wenn die positive Richtung des einen Strahls im Sinne der Uhrzeigerbewegung um die positive Richtung des andern Strahles dreht.

Darnach stimmen die Koordinaten p_{ab} bis auf konstante Faktoren mit den Momenten überein, die von dem Strahle mit den Tetraederkanten gebildet werden. Bezeichnet man nämlich diese Momente mit m_{ab}, so ist, da für die Kante $A_2 A_3$ (vergl. auch 146)

$$p_{23} = -\frac{1}{\omega_2\,\omega_3\,d_{23}}$$

ist und alle andern Koordinaten den Wert Null haben,

$$m_{23} = -\nabla \frac{1}{\omega_2\,\omega_3\,d_{23}}\,p_{14} \tag{173}$$

und

$$p_{14} = -\frac{\omega_2\,\omega_3\,d_{23}}{\nabla}\,m_{23}. \tag{174}$$

Man könnte daher statt der p_{ab} die m_{ab} als Koordinaten eines Strahles einführen, besonders da die letztern Werte eine geometrische Bedeutung besitzen, die von der Lage des Einheitspunktes unabhängig ist und eine Koordinate sich jeweilen nur auf eine Kante bezieht. Ist dann

m_1 das Moment der Kanten $A_2 A_3$, $A_1 A_4$
m_2 „ „ „ „ $A_3 A_1$, $A_2 A_4$
m_3 „ „ „ „ $A_1 A_2$, $A_3 A_4$,

so dass

$$\triangle = d_{23}\,d_{14}\,m_1 = d_{31}\,d_{24}\,m_2 = d_{12}\,d_{34}\,m_3 \tag{175}$$

ist, so ist

$$p_{23} = -\frac{\omega_1\,\omega_4\,d_{14}}{\nabla}\,m_{14},\quad p_{14} = -\frac{\omega_2\,\omega_3\,d_{23}}{\nabla}\,m_{23},$$

$$p_{23}\,p_{14} = \frac{m_{23}\,m_{14}}{\nabla . m_1},$$

und die identische Gleichung

$$p_{23}\,p_{14} + p_{31}\,p_{24} + p_{12}\,p_{34} = 0$$

geht über in

$$\frac{m_{23}\,m_{14}}{m_1} + \frac{m_{31}\,m_{24}}{m_2} + \frac{m_{12}\,m_{34}}{m_3} = 0. \tag{176}$$

Für die Richtungskoordinaten eines Strahles erhält man

$$\begin{aligned}
-\triangle\,\omega_1\,u_1 &= \quad\cdot\quad + d_{34}\,m_{34} + d_{42}\,m_{42} + d_{23}\,m_{23} \\
-\triangle\,\omega_2\,u_2 &= d_{43}\,m_{43} \quad\cdot\quad + d_{14}\,m_{14} + d_{31}\,m_{31} \\
-\triangle\,\omega_3\,u_3 &= d_{24}\,m_{24} + d_{41}\,m_{41} \quad\cdot\quad + d_{12}\,m_{12} \\
-\triangle\,\omega_4\,u_4 &= d_{32}\,m_{32} + d_{13}\,m_{13} + d_{21}\,m_{21} \quad\cdot
\end{aligned} \tag{177}$$

und die nicht homogene Bedingungsgleichung lautet

$$-\triangle^2 = \sum_{ab} d_{ab}^2\,(d_{cb}\,m_{cb} + d_{bb}\,m_{bb} + d_{bc}\,m_{bc})\,(d_{bc}\,m_{bc} + d_{ca}\,m_{ca} + d_{ab}\,m_{ab}). \tag{178}$$

B. Stellungskoordinaten.

84. Die bis jetzt abgeleiteten Resultate über Strahlenkoordinaten erster und zweiter Art gelten ihrer Herleitung gemäss nur für solche Strahlen, welche im Endlichen gelegen sind. Nur für solche Strahlen lassen sich die Grössen u_a und v_a des Artikels 74 berechnen und nur für solche gelten die Bedingungsgleichungen (157) und (161).

Es kann nun aber auch ein Strahl ganz im Unendlichen liegen und damit eine Stellung definieren. Dies bedingt hinsichtlich der projektivischen Konstruktionen keinen Unterschied, macht aber eine abweichende Behandlung notwendig, sobald metrische Fragen in Betracht kommen.

Ein solcher Strahl kann angesehen werden als Verbindungslinie zweier unendlich fernen Punkte oder als Schnittlinie zweier parallelen Ebenen. Es werden sich demnach auch hier wieder zwei Arten von Strahlenkoordinaten einstellen, von denen man vermutet, dass die einen durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor in die andern übergehen.

85. Es seien zwei unendlich ferne Punkte bestimmt durch die genauen Richtungskoordinaten u_a und v_a und φ der Winkel dieser Richtungen. Wir werden nun die Determinanten

$$q'_{ab} = v_a u_b - v_b u_a \tag{179}$$

einer genauern Betrachtung unterwerfen. Sind u^*_a und v^*_a zwei Richtungen in dem Büschel der Richtungen u_a und v_a, so ist nach Artikel 60

$$\varrho\, u^*_a = u_a - \lambda\, v_a$$
$$\sigma\, v^*_a = u_a - \mu\, v_a\,,$$

wo

$$\varrho = \sqrt{1 - 2\lambda \cos\varphi + \lambda^2}$$
$$\sigma = \sqrt{1 - 2\mu \cos\varphi + \mu^2}$$

und λ und μ die bezüglichen Teilverhältnisse sind. Weiter findet man

$$\varrho\,\sigma \cdot q^{*\prime}_{ab} = (\lambda - \mu)\, q'_{ab}\,.$$

Wie bei Artikel 69 zeigt man nun, dass

$$\frac{\lambda - \mu}{\varrho \, \sigma} = \frac{\sin \varphi^*}{\sin \varphi}$$

ist, wenn φ^* der Winkel der Richtungen u_a^* und v_a^* ist, so dass

$$\frac{q_{ab}^{*\prime}}{\sin \varphi^*} = \frac{q_{ab}'}{\sin \varphi}. \tag{180}$$

Es wird sich daher empfehlen, diese Quotienten als die wahren Koordinaten eines unendlich fernen Strahles anzusehen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die definierenden Richtungen normal zu wählen. Wir bezeichnen diese Quotienten mit q_{ab} und nennen sie die genauen Stellungskoordinaten erster Art.

Auch eine Stellung ist ein zweiseitiges Gebilde (vgl. Art. 51). Denken wir uns eine Ebene dieser Stellung, so nennen wir diejenige Seite die positive, von welcher aus die Drehung der positiven Richtung von u_a in die positive Richtung von v_a mit der Uhrzeigerbewegung übereinstimmend erscheint. Dieser Stellung geben wir die eben definierten Koordinaten q_{ab}; derjenigen Stellung aber, welche mit der erstern zusammenfällt, bei welcher aber die beiden Seiten vertauscht erscheinen, geben wir die Koordinaten $-q_{ab}$.

86. Eliminiert man aus den Gleichungen

$$\omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 + \omega_3 u_3 + \omega_4 u_4 = 0$$
$$\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2 + \omega_3 v_3 + \omega_4 v_4 = 0$$

ω_1 oder ω_2 oder ω_3 oder ω_4, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{array}{llll} \cdot & q_{12}\,\omega_2 + q_{13}\,\omega_3 + q_{14}\,\omega_4 = 0 \\ q_{21}\,\omega_1 & \cdot \quad + q_{23}\,\omega_3 + q_{24}\,\omega_4 = 0 \\ q_{31}\,\omega_1 + q_{32}\,\omega_2 & \cdot \quad + q_{34}\,\omega_4 = 0 \\ q_{41}\,\omega_1 + q_{42}\,\omega_2 + q_{43}\,\omega_3 & \cdot \quad = 0, \end{array} \tag{181}$$

denen die genauen Koordinaten einer Stellung und ihre Verhältnisse genügen müssen. Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, so ergiebt ihre Summe identisch Null. Multipliziert man aber die erste mit q_{23}, die zweite mit q_{31}, die dritte mit q_{12}, so ergiebt ihre Summe

$$q_{23}\, q_{14} + q_{31}\, q_{24} + q_{12}\, q_{34} = 0. \tag{182}$$

Nimmt man diese Gleichung stets als erfüllt an, so sind von den

Gleichungen (181) im allgemeinen nur zwei unabhängig. Ist aber eine der Koordinaten q_{ab} gleich Null, so sind schon jene beiden Gleichungen, welche diese Koordinate enthalten, nicht von einander unabhängig.

87. Die Gleichungen (181) drücken eine Beziehung aus zwischen der unendlich fernen Ebene ω_a und der Stellung q_{ab}. Wir setzen nun an Stelle der unendlich fernen Ebene eine im Endlichen gelegene Ebene ζ_a und untersuchen die Bedeutung der Gleichungen

$$\begin{array}{rrrrl} \cdot & q_{12}\,\zeta_2 & + q_{13}\,\zeta_3 & + q_{14}\,\zeta_4 & = 0 \\ q_{21}\,\zeta_1 & \cdot & + q_{23}\,\zeta_3 & + q_{24}\,\zeta_4 & = 0 \\ q_{31}\,\zeta_1 & + q_{32}\,\zeta_2 & \cdot & + q_{34}\,\zeta_4 & = 0 \\ q_{41}\,\zeta_1 & + q_{42}\,\zeta_2 & + q_{43}\,\zeta_3 & \cdot & = 0, \end{array} \tag{183}$$

von denen wieder im allgemeinen nur zwei unabhängig sind. Setzt man für einen Augenblick

$$\zeta_1\,u_1 + \zeta_2\,u_2 + \zeta_3\,u_3 + \zeta_4\,u_4 = U$$
$$\zeta_1\,v_1 + \zeta_2\,v_2 + \zeta_3\,v_3 + \zeta_4\,v_4 = V,$$

so kann man die Gleichungen (183) in der Form schreiben

$$v_1\,U - u_1\,V = 0$$
$$v_2\,U - u_2\,V = 0$$
$$v_3\,U - u_3\,V = 0$$
$$v_4\,U - u_4\,V = 0.$$

Diese Gleichungen können, da die Richtungen u_a und v_a nicht zusammenfallen, nur bestehen, wenn

$$U = 0\,, \quad V = 0\,,$$

d. h. wenn die Richtungen u_a und v_a der Ebene ζ_a angehören und also die Ebene ζ_a die Stellung q_{ab} hat. Es drücken somit die Gleichungen (183) die Incidenz der Ebene ζ_a und der Stellung q_{ab} aus und demnach die Gleichungen (181), dass der Strahl q_{ab} unendlich fern ist.

88. Hat nun die beliebige Ebene ζ_a nicht die Stellung q_{ab}, so verschwinden die Ausdrücke in den Gleichungen (183) nicht und man kann setzen

$$\begin{array}{rl} \varrho\,w_1 = & \cdot \quad q_{12}\,\zeta_2 + q_{13}\,\zeta_3 + q_{14}\,\zeta_4 \\ \varrho\,w_2 = & q_{21}\,\zeta_1 \quad \cdot \quad + q_{23}\,\zeta_3 + q_{24}\,\zeta_4 \\ \varrho\,w_3 = & q_{31}\,\zeta_1 + q_{32}\,\zeta_2 \quad \cdot \quad + q_{34}\,\zeta_4 \\ \varrho\,w_4 = & q_{41}\,\zeta_1 + q_{42}\,\zeta_2 + q_{43}\,\zeta_3 \quad \cdot \quad . \end{array} \tag{184}$$

Es sind dann die w_α die Koordinaten einer Richtung; denn aus den obigen Gleichungen folgt leicht, da $\varrho \neq 0$ ist,

$$\omega_1 w_1 + \omega_2 w_2 + \omega_3 w_3 + \omega_4 w_4 = 0.$$

Die Grösse ϱ denken wir uns dabei so bestimmt, dass die w_α der Gleichung

$$-1 = E(w)$$

genügen.

Multipliziert man die Gleichungen (184) mit $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$, so ergiebt ihre Summe

$$w_1 \zeta_1 + w_2 \zeta_2 + w_3 \zeta_3 + w_4 \zeta_4 = 0,$$

welche Gleichung aussagt, dass die Richtung w_α der Ebene ζ_α angehört. Weiter ergeben sich aus diesen Gleichungen

$$\begin{array}{llll} \cdot & w_2 q_{34} + w_3 q_{42} + w_4 q_{23} = 0 \\ w_1 q_{43} & \cdot \quad + w_3 q_{14} + w_4 q_{31} = 0 \\ w_1 q_{24} + w_2 q_{41} & \cdot \quad + w_4 q_{12} = 0 \\ w_1 q_{32} + w_2 q_{13} + w_3 q_{21} & \cdot \quad = 0. \end{array} \tag{185}$$

Da diese Gleichungen aussagen, dass die Determinanten dritten Grades des rechteckigen Systems

$$\begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix}$$

den Wert Null haben, so drücken sie die Incidenz der Richtung w_α mit der Stellung $q_{\alpha b}$ aus. Es bestimmen demnach die Gleichungen (184) diejenige Richtung w_α, welche der Stellung $q_{\alpha b}$ und der Ebene ζ_α gemein ist.

89. In den Gleichungen (184), die wir in die Gleichung

$$\varrho w_\alpha = q_{\alpha 1} \zeta_1 + q_{\alpha 2} \zeta_2 + q_{\alpha 3} \zeta_3 + q_{\alpha 4} \zeta_4 \tag{186}$$

zusammenfassen können, ist noch der Faktor ϱ so zu bestimmen, dass die w_α der Gleichung

$$-1 = E(w)$$

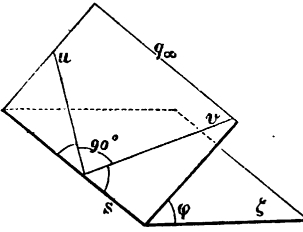
genügen. Da nun

$$\begin{aligned} \varrho w_\alpha &= \zeta_1 (v_\alpha u_1 - v_1 u_\alpha) + \zeta_2 (v_\alpha u_2 - v_2 u_\alpha) + \cdots \\ &= v_\alpha (\zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2 + \cdots) - u_\alpha (\zeta_1 v_1 + \zeta_2 v_2 + \cdots) \\ &= \frac{4}{\varepsilon_0} \Big[v_\alpha \sin(u, \zeta) - u_\alpha \sin(v, \zeta) \Big] \end{aligned}$$

ist, so erhält man

$$-\varrho^2\left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^2 = E\,[v \sin(u, \zeta) - u \sin(v, \zeta)]$$
$$= \sin^2(u, \zeta)\cdot E(v) + \sin^2(v, \zeta)\cdot E(u)$$
$$- \sin(u, \zeta)\sin(v, \zeta)\cdot E(u \mid v).$$

Da die beiden Richtungen u_a und v_a normal sind, so ist der letzte Summand gleich null; da ferner $E(u) = E(v) = -1$ ist, so ergiebt sich



$$\left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^2\varrho^2 = \sin^2(u, \zeta) + \sin^2(v, \zeta).$$

Es sei nun s die Schnittlinie einer Ebene von der Stellung q_{ab} mit der Ebene ζ_a und φ der Winkel dieser Ebenen. Es ist dann, weil die Richtungen u_a und v_a normal stehen,

$$\sin^2(u, s) + \sin^2(v, s) = 1;$$

ferner

$$\sin\varphi = \frac{\sin(u, \zeta)}{\sin(u, s)} = \frac{\sin(v, \zeta)}{\sin(v, s)},$$

so dass

$$\sin^2(u, \zeta) + \sin^2(v, \zeta) = \sin^2\varphi\,[\sin^2(u, s) + \sin^2(v, s)] = \sin^2\varphi$$

ist. Wir dürfen demnach

$$\varrho = \frac{4}{\varepsilon_0}\sin\varphi \tag{187}$$

setzen, wo also φ der Winkel zwischen der Stellung q_{ab} und der Ebene ζ_a ist.

Mittels eines Beispiels erkennt man, dass, wenn ϱ positiv ist, die positive Richtung von w_a (nach Art. 69) diejenige ist, für welche die Drehung einer Ebene von der Stellung q_{ab} in die Ebene ζ_a bis zur vollständigen Deckung (Art. 51) im positiven Sinne erfolgt.

90. Die genauen Koordinaten einer Stellung müssen einer nicht homogenen Gleichung genügen. Wir könnten zu derselben gelangen, indem wir den Sinus des Winkels φ der beiden Richtungen u_a und v_a berechneten. Aus den Gleichungen

$$-2 = E(u \mid u), \quad -2 = E(v \mid v)$$
$$-2\cos\varphi = E(u \mid v)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} 4 \sin^2\varphi &= E(u \mid u)\, E(v \mid v) - E^2(u \mid v) \\ &= \sum_{\mathfrak{ab}} \sum_{\mathfrak{pq}} (d^2_{\mathfrak{ap}}\, d^2_{\mathfrak{bq}} - d^2_{\mathfrak{aq}}\, d^2_{\mathfrak{bp}})\, \omega_{\mathfrak{a}}\, \omega_{\mathfrak{b}}\, \omega_{\mathfrak{p}}\, \omega_{\mathfrak{q}}\, q'_{\mathfrak{ab}}\, q'_{\mathfrak{pq}} \end{aligned}$$

und hätten nun mit dem Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung die ähnlichen Umformungen vorzunehmen, die wir früher mit dem Ausdruck

$$W(\xi \mid \xi) \cdot W(\eta \mid \eta) - W^2(\xi \mid \eta)$$

vorgenommen haben. Wir verzichten auf diese sehr weitläufige und umständliche Rechnung.

Weit einfacher gelangen wir folgendermassen zum Ziele. Von einem beliebigen Punkte $z_{\mathfrak{a}}$ aus ziehen wir die Strahlen von den Richtungen $u_{\mathfrak{a}}$ und $v_{\mathfrak{a}}$ und nehmen auf denselben in den Entfernungen a und b zwei Punkte $x_{\mathfrak{a}}$ und $y_{\mathfrak{a}}$ an. Es ist dann

$$x_{\mathfrak{a}} = z_{\mathfrak{a}} + a\, u_{\mathfrak{a}}, \quad y_{\mathfrak{a}} = z_{\mathfrak{a}} + b\, v_{\mathfrak{a}}.$$

Die Koordinaten $\xi_{\mathfrak{a}}$ der Verbindungsebene der drei Punkte berechnen wir nach Art. 64 und erhalten z. B. für ξ_1

$$\xi_1 = \frac{4}{\varepsilon_0} \frac{\nabla}{\sin\varphi} (z_2\, q'_{34} + z_3\, q'_{42} + z_4\, q'_{23}).$$

Setzt man daher

$$\begin{aligned} q_1' &= \quad \cdot \quad + z_2\, q'_{34} + z_3\, q'_{42} + z_4\, q'_{23} \\ q_2' &= z_1\, q'_{43} \quad \cdot \quad + z_3\, q'_{14} + z_4\, q'_{31} \\ q_3' &= z_1\, q'_{24} + z_2\, q'_{41} \quad \cdot \quad + z_4\, q'_{12} \\ q_4' &= z_1\, q'_{32} + z_2\, q'_{13} + z_3\, q'_{21} \quad \cdot \quad , \end{aligned} \tag{188}$$

so ist allgemein

$$\xi_{\mathfrak{a}} = \frac{4}{\varepsilon_0} \frac{\nabla}{\sin\varphi} q'_{\mathfrak{a}}. \tag{189}$$

Damit ist diejenige Ebene bestimmt, welche durch den Punkt $z_{\mathfrak{a}}$ geht und die Stellung $q'_{\mathfrak{ab}}$ besitzt. Nach Art. 64 geht die positive Seite der Ebene $\xi_{\mathfrak{a}}$ auf die positive Seite der Stellung $q'_{\mathfrak{ab}}$.

Die berechneten Werte $\xi_{\mathfrak{a}}$ genügen der Gleichung

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 = W(\xi \mid \xi),$$

und es ist daher

$$\sin^2\varphi = \nabla^2\, W(q' \mid q'). \tag{190}$$

Diese Gleichung hat folgende Bedeutung. Nimmt man sechs Grössen $q'_{\mathfrak{ab}}$ so an, dass sie den Gleichungen

$$\begin{array}{rrrrl} \cdot & q_{12}\,\omega_2 & + q_{13}\,\omega_3 & + q_{14}\,\omega_4 & = 0 \\ q_{21}\,\omega_1 & \cdot & + q_{23}\,\omega_3 & + q_{24}\,\omega_4 & = 0 \\ q_{31}\,\omega_1 & + q_{32}\,\omega_2 & \cdot & + q_{34}\,\omega_4 & = 0 \\ q_{41}\,\omega_1 & + q_{42}\,\omega_2 & + q_{43}\,\omega_3 & \cdot & = 0 \end{array} \tag{191}$$

genügen, so giebt die Gleichung (190) den Winkel der Richtungen an, aus deren genauen Koordinaten wir die q'_{ab} entstanden denken können. Setzen wir aber $\varphi = 90^0$, also $\sin\varphi = 1$, so gehen die q'_{ab} in die genauen q_{ab} über. Die zugehörigen q'_a schreiben wir dann ebenfalls ohne Accente, so dass

$$\begin{array}{rl} q_1 = & \cdot \quad z_2\,q_{34} + z_3\,q_{42} + z_4\,q_{23} \\ q_2 = & z_1\,q_{43} \quad \cdot \quad + z_3\,q_{14} + z_4\,q_{31} \\ q_3 = & z_1\,q_{24} + z_2\,q_{41} \quad \cdot \quad + z_4\,q_{12} \\ q_4 = & z_1\,q_{32} + z_2\,q_{13} + z_3\,q_{21} \quad \cdot \end{array} \tag{192}$$

ist. Die Gleichung (190) ergiebt dann

$$1 = \nabla^2 \cdot W(q \mid q), \tag{193}$$

eine Gleichung, welche die Bedingung angiebt, der die genauen Stellungskoordinaten q_{ab} genügen müssen.

91. Auffallend in diesen Gleichungen ist das Auftreten der Koordinaten eines willkürlichen Punktes z_a. Diese Koordinaten dürfen auf die Funktion W nach Bedeutung der betreffenden Gleichung keinen Einfluss ausüben. In der That nehmen wir statt des Punktes z_a den Punkt z^*_a, so wird die Ebene ξ_a parallel verschoben nach der Ebene ξ^*_a, eine Verschiebung, welche, wie wir wissen, auf die Funktion $W(\xi \mid \xi)$ keinen Einfluss ausübt.

Diese Parallelverschiebung können wir analytisch nachweisen. Definiert man entsprechend

$$\begin{array}{rl} q_1^{*\prime} = & \cdot \quad z_2^*\,q'_{34} + z_3^*\,q'_{42} + z_4^*\,q'_{23} \\ q_2^{*\prime} = & z_1^*\,q'_{43} \quad \cdot \quad + z_3^*\,q'_{14} + z_4^*\,q'_{31} \\ q_3^{*\prime} = & z_1^*\,q'_{24} + z_2^*\,q'_{41} \quad \cdot \quad + z_4^*\,q'_{12} \\ q_4^{*\prime} = & z_1^*\,q'_{32} + z_2^*\,q'_{13} + z_3^*\,q'_{21} \quad \cdot \quad , \end{array}$$

so ist auch

$$\xi^*_a = \frac{4}{\varepsilon_0}\,\frac{\nabla}{\sin\varphi}\,q_a^{*\prime}$$

und daher

$$\xi_a^* = \frac{4}{\varepsilon_0} \frac{\nabla}{\sin\varphi} \left[q'_a + (q_a^{*\prime} - q'_a) \right]$$
$$= \xi_a + \frac{4}{\varepsilon_0} \frac{\nabla}{\sin\varphi} (q_a^{*\prime} - q'_a)$$

und es ist nur noch zu zeigen, dass die Differenzen $q_a^{*\prime} - q'_a$, entsprechend der Formel (85), den Werten ω_a proportional sind. In der That ist z. B.

$$q_1^{*\prime} - q'_1 = (z_2^* - z_2)\, q'_{34} + (z_3^* - z_3)\, q'_{42} + (z_4^* - z_4)\, q'_{23}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & z_2^* & z_3^* & z_4^* \\ 0 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 0 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix}.$$

Subtrahieren wir nun von der ersten Spalte das ω_2-fache der zweiten, das ω_3-fache der dritten und das ω_4-fache der vierten Spalte, so werden die Elemente der ersten Spalte

$$\omega_1\, z_1, \quad \omega_1\, z_1^*, \quad \omega_1\, v_1, \quad \omega_1\, u_1$$

und es ist daher

$$q_1^{*\prime} - q'_1 = \omega_1 \cdot \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1^* & z_2^* & z_3^* & z_4^* \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix}.$$

Damit ist aber das Behauptete bewiesen.

92. Die eingeführten Stellungskoordinaten q_{ab} genügen also den linearen homogenen Gleichungen

$$\begin{array}{llllll} \cdot & q_{12}\,\omega_2 & + q_{13}\,\omega_3 & + q_{14}\,\omega_4 & = 0 \\ q_{21}\,\omega_1 & \cdot & + q_{23}\,\omega_3 & + q_{24}\,\omega_4 & = 0 \\ q_{31}\,\omega_1 & + q_{32}\,\omega_2 & \cdot & + q_{34}\,\omega_4 & = 0 \\ q_{41}\,\omega_1 & + q_{42}\,\omega_2 & + q_{43}\,\omega_3 & \cdot & = 0, \end{array} \qquad (194)$$

welche nur drei unabhängigen Gleichungen äquivalent sind und welche noch die Gleichung involvieren

$$q_{34}\, q_{12} + q_{24}\, q_{31} + q_{14}\, q_{23} = 0, \qquad (195)$$

sowie der quadratischen, nicht homogenen Gleichung

$$1 = \nabla^2 \cdot W(q_a \mid q_a), \qquad (196)$$

welche den willkürlichen Punkt z_a enthält.

Es liegt nun die Vermutung nahe, dass die Gleichung (196) zufolge der Variabilität des Punktes z_a die Gleichungen (194) umfassen möchte. Um dies zu untersuchen, gehen wir folgendermassen vor. — Es seien q_{ab} zwölf Zahlen, von denen man nur weiss, dass $q_{ab} + q_{ba} = 0$ ist und die daher eine sechsfache Mannigfaltigkeit bilden. Setzt man

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \cdot \quad q_{12}\,\omega_2 + q_{13}\,\omega_3 + q_{14}\,\omega_4,\\
\varphi_2 &= q_{21}\,\omega_1 \quad \cdot \quad + q_{23}\,\omega_3 + q_{24}\,\omega_4,\\
\varphi_3 &= q_{31}\,\omega_1 + q_{32}\,\omega_2 \quad \cdot \quad + q_{34}\,\omega_4,\\
\varphi_4 &= q_{41}\,\omega_1 + q_{42}\,\omega_2 + q_{43}\,\omega_3 \quad \cdot \quad,
\end{aligned}$$

so ist

$$\omega_1\,\varphi_1 + \omega_2\,\varphi_2 + \omega_3\,\varphi_3 + \omega_4\,\varphi_4 \equiv 0.$$

Es besitzen daher die φ_a nur eine dreifache Mannigfaltigkeit; dementsprechend müssen bei gegebenen φ_a drei der q_{ab} willkürlich bleiben. Man überzeugt sich leicht, dass bei gegebenen φ_a immer drei der q_{ab}, welche keinen Index gemein haben, beliebig angenommen werden dürfen.

Bildet man weiter die linearen Verbindungen

$$\begin{aligned}
q_1 &= \cdot \quad z_2\,q_{34} + z_3\,q_{42} + z_4\,q_{23},\\
q_2 &= z_1\,q_{43} \quad \cdot \quad + z_3\,q_{14} + z_4\,q_{31},\\
q_3 &= z_1\,q_{24} + z_2\,q_{41} \quad \cdot \quad + z_4\,q_{12},\\
q_4 &= z_1\,q_{32} + z_2\,q_{13} + z_3\,q_{21} \quad \cdot \quad,
\end{aligned}$$

wobei die z_a die Koordinaten eines beliebigen Punktes sind, so ist

$$z_1\,q_1 + z_2\,q_2 + z_3\,q_3 + z_4\,q_4 \equiv 0,$$

und die q_a stellen ebenfalls eine dreifache Mannigfaltigkeit dar. Setzt man

$$q_{34} = \psi_2, \quad q_{42} = \psi_3, \quad q_{23} = \psi_4,$$

so sind die ψ_a keiner Beschränkung unterworfen und es sind dann die q_a lineare Funktionen nicht nur der z_a, sondern auch der φ_a und der ψ_a und zwar findet sich

$$\begin{aligned}
q_1 &= \psi_2\,z_2 + \psi_3\,z_3 + \psi_4\,z_4 ,\\
\omega_1\,q_2 &= -\,\psi_2 + \varphi_3\,z_4 - \varphi_4\,z_3 + \omega_2\,q_1,\\
\omega_1\,q_3 &= -\,\psi_3 + \varphi_4\,z_2 - \varphi_2\,z_4 + \omega_3\,q_1,\\
\omega_1\,q_4 &= -\,\psi_4 + \varphi_2\,z_3 - \varphi_3\,z_2 + \omega_4\,q_1.
\end{aligned}$$

Wir unterwerfen nun die q_a der Gleichung

$$1 = \nabla^2 \cdot W(q \mid q), \tag{196}$$

und haben zu zeigen, dass diese Gleichung bei variabeln z_a nur bestehen kann, wenn die sämtlichen φ_a den Wert Null haben. Setzen wir zunächst

$$\begin{aligned} X_2 &= -\psi_2 + \varphi_3 z_4 - \varphi_4 z_3, \\ X_3 &= -\psi_3 + \varphi_4 z_2 - \varphi_2 z_4, \quad X_1 = 0, \\ X_4 &= -\psi_4 + \varphi_2 z_3 - \varphi_3 z_2, \end{aligned}$$

so kann man die vier Gleichungen für die q_a zusammenziehen in

$$\omega_1 q_a = X_a + \omega_a q_1$$

und die Gleichung (196) ergiebt

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1^2}{\nabla^2} &= W(X_a + \omega_a q_1 \mid X_a + \omega_a q_1) \\ &= W(X \mid X) + 2 q_1 \cdot W(\omega \mid X) + q_1^2 \cdot W(\omega \mid \omega) \\ &= W(X \mid X) \end{aligned}$$

nach (83) und (84). Setzt man weiter

$$\begin{aligned} Y_2 &= \varphi_3 z_4 - \varphi_4 z_3, \\ Y_3 &= \varphi_4 z_2 - \varphi_2 z_4, \\ Y_4 &= \varphi_2 z_3 - \varphi_3 z_2, \end{aligned}$$

so ist

$$X_a = Y_a - \psi_a, \quad (a = 2, 3, 4)$$

und daher

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1^2}{\nabla^2} &= W(Y - \psi \mid Y - \psi) \\ &= W(Y \mid Y) - 2\, W(Y \mid \psi) + W(\psi \mid \psi). \end{aligned}$$

Hierin ist der erste Summand eine homogene Funktion zweiten Grades der z_2, z_3, z_4, der zweite eine homogene Funktion ersten Grades derselben Grössen, während der dritte Summand die z_a nicht mehr enthält. Soll daher die Gleichung (196) für alle Werte der z_2, z_3, z_4 bestehen, so zerfällt diese Gleichung in

$$\begin{aligned} W(Y \mid Y) &= 0, \\ W(Y \mid \psi) &= 0, \\ W(\psi \mid \psi) &= \frac{\omega_1^2}{\nabla^2}. \end{aligned} \tag{196a}$$

Wir betrachten zunächst die erste dieser Gleichungen und erhalten, indem wir die Koeffizienten der Glieder von z_a^2 und $2 z_a z_b$ gleich Null setzen, die Gleichungen

$$\begin{aligned} C_{33} \varphi_4^2 + C_{44} \varphi_3^2 - 2\, C_{34} \varphi_3 \varphi_4 &= 0, \\ C_{44} \varphi_2^2 + C_{22} \varphi_4^2 - 2\, C_{42} \varphi_4 \varphi_2 &= 0, \\ C_{22} \varphi_3^2 + C_{33} \varphi_2^2 - 2\, C_{23} \varphi_2 \varphi_3 &= 0, \end{aligned} \tag{197}$$

$$
\begin{aligned}
- C_{22}\varphi_3\varphi_4 - C_{34}\varphi_2^2 + C_{23}\varphi_2\varphi_4 + C_{24}\varphi_2\varphi_3 &= 0,\\
- C_{33}\varphi_4\varphi_2 - C_{42}\varphi_3^2 + C_{34}\varphi_3\varphi_2 + C_{32}\varphi_3\varphi_4 &= 0,\\
- C_{44}\varphi_2\varphi_3 - C_{23}\varphi_4^2 + C_{42}\varphi_4\varphi_3 + C_{43}\varphi_4\varphi_2 &= 0,
\end{aligned}
\tag{197}
$$

wobei zur Abkürzung

$$\frac{D_{ab}}{\delta_a\,\delta_b} = C_{ab}$$

geschrieben wurde. Diese Gleichungen werden befriedigt, wenn die sämtlichen $\varphi_a = 0$ sind. Ferner erkennt man, dass, wenn eine der drei Grössen φ_2, φ_3, φ_4 den Wert Null hat, die andern und damit auch φ_1 den Wert Null haben. Es ist zu zeigen, dass dies die einzige Lösung dieser Gleichungen ist.

Hat keine der vier φ_a den Wert Null, so kann man aus (197_1) das Verhältnis $\varphi_3 : \varphi_4$ berechnen. Da die Diskriminante dieser Gleichung gleich

$$C_{34}^2 - C_{33}\,C_{44} = \frac{1}{\delta_3^2\,\delta_4^2}\,(D_{34}^2 - D_{33}\,D_{44})$$

oder nach dem in Art. 77 gebrauchten Determinantensatz

$$= -\frac{\triangle^2\,d_{12}^2}{\delta_3^2\,\delta_4^2}$$

ist, so wird dieses Verhältnis einen komplexen Wert erhalten. Beschränkt man sich auf r e e l l e q_{ab}, so kann dies nicht eintreten und es ist bewiesen, dass die sämtlichen φ_a den Wert Null haben müssen.

Der folgende Beweis ist von der Voraussetzung reeller q_{ab} unabhängig. Die sechs Gleichungen (197) sind linear in den sechs Grössen φ_2^2, φ_3^2, φ_4^2, $\varphi_3\,\varphi_4$, $\varphi_4\,\varphi_2$, $\varphi_2\,\varphi_3$. Nach einigen umständlichen Umformungen erhält man für die Determinante derselben den Wert

$$-\frac{2\triangle^8}{\delta_2^4\,\delta_3^4\,\delta_4^4}.$$

Da derselbe nicht null sein kann, muss $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$ sein. Es haben somit unter allen Umständen die Grössen φ_a den Wert Null, d. h. d i e G l e i c h u n g (196) i n v o l v i e r t d i e G l e i c h u n g e n (194) u n d d a m i t a u c h d i e G l e i c h u n g (195).

Sind nun alle $\varphi_a = 0$, so sind auch alle $Y_a = 0$, und die beiden ersten Gleichungen von (196a) werden identisch erfüllt. Die letzte Gleichung (196a) unterwirft die ψ_2, ψ_3, ψ_4 einer Bedingung, womit die dreifache Mannigfaltigkeit der q_{ab} auf eine

zweifache reduziert wird, entsprechend den zweifach unendlich vielen Stellungen des Raumes.

93. Die Willkürlichkeit des Punktes z_a können wir dazu benützen, um spezielle Bedingungsgleichungen der q_{ab} abzuleiten. Man kann z. B. den Punkt z_a mit dem Einheitspunkt zusammenfallen lassen, was wir durch Ueberstreichen der betreffenden Grössen andeuten wollen. Es ist also in diesem Falle

$$\begin{aligned} \overline{q_1} &= \cdot \quad q_{34} + q_{42} + q_{23} \\ \overline{q_2} &= q_{43} \quad \cdot + q_{14} + q_{31} \\ \overline{q_3} &= q_{24} + q_{41} \quad \cdot + q_{12} \\ \overline{q_4} &= q_{32} + q_{13} + q_{21} \quad \cdot \end{aligned} \tag{198}$$

und

$$1 = \nabla^2 \, W(\overline{q} \mid \overline{q}). \tag{199}$$

Unsymmetrische Formeln erhalten wir, wenn wir z_a mit einer Ecke des Fundamentaltetraeders zusammenfallen lassen. Für

$$z_a = A_1 \left(\frac{1}{\omega_1}, 0, 0, 0\right) \quad \text{ist}$$

$$\omega_1 q_1 = 0, \; \omega_1 q_2 = q_{43}, \; \omega_1 q_3 = q_{24}, \; \omega_1 q_4 = q_{32},$$

und daher

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = \nabla^2 \Big\{ & \frac{q_{43}^2}{e_2^2} + \frac{q_{24}^2}{e_3^2} + \frac{q_{32}^2}{e_4^2} - 2 \frac{q_{24} q_{32}}{e_3 e_4} \cos (34) \\ & - 2 \frac{q_{32} q_{43}}{e_4 e_2} \cos (42) - 2 \frac{q_{43} q_{24}}{e_2 e_3} \cos (23) \Big\}, \end{aligned} \tag{200}$$

oder auch

$$\begin{aligned} - \omega_1^2 = \nabla^2 \Big\{ & \frac{D_{22}}{\delta_2^2} q_{34}^2 + \frac{D_{33}}{\delta_3^2} q_{42}^2 + \frac{D_{44}}{\delta_4^2} q_{23}^2 \\ & + 2 \frac{D_{34}}{\delta_3 \delta_4} q_{42} q_{23} + 2 \frac{D_{42}}{\delta_4 \delta_2} q_{23} q_{34} + 2 \frac{D_{23}}{\delta_2 \delta_3} q_{34} q_{42} \Big\}, \end{aligned} \tag{201}$$

welche Gleichung mit ($196 a_3$) übereinstimmt. Es genügen somit schon je drei der Stellungskoordinaten, deren Indices einen Cyklus bilden, einer nicht homogenen, quadratischen Gleichung.

94. Wir merken noch die folgende Beziehung an. Aus den beiden ersten Gleichungen (192) folgt

$$\begin{aligned} q_1 \omega_2 - q_2 \omega_1 = {} & q_{34} (\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2) \\ & + z_3 (\omega_2 q_{42} + \omega_1 q_{41}) + z_4 (\omega_2 q_{23} + \omega_1 q_{13}) \end{aligned}$$

oder mit Hülfe von (194)

$$q_1 \omega_2 - q_2 \omega_1 = q_{34}.$$

So findet man allgemein

$$q_{\mathfrak{a}}\,\omega_{\mathfrak{b}} - q_{\mathfrak{b}}\,\omega_{\mathfrak{a}} = q_{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}, \tag{202}$$

wenn $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ eine gerade Permutation von 1 2 3 4 ist.

95. Wir wenden uns nun zu den Stellungskoordinaten zweiter Art.

Ein unendlich ferner Strahl ist auch die Schnittlinie zweier parallelen Ebenen. Schneidet man die Ebene $\xi_{\mathfrak{a}}$ mit der im Abstande p parallelen Ebene

$$\eta_{\mathfrak{a}} = \xi_{\mathfrak{a}} - \frac{4}{\varepsilon_0}\,p \cdot \omega_{\mathfrak{a}},$$

so erhält die Schnittlinie die Koordinaten

$$\begin{aligned} \chi'_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} &= \eta_{\mathfrak{a}}\,\xi_{\mathfrak{b}} - \eta_{\mathfrak{b}}\,\xi_{\mathfrak{a}} \\ &= \frac{4}{\varepsilon_0}\,p\,(\xi_{\mathfrak{a}}\,\omega_{\mathfrak{b}} - \xi_{\mathfrak{b}}\,\omega_{\mathfrak{a}}). \end{aligned} \tag{203}$$

Es sind somit die Grössen $\chi'_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ der Distanz p des definierenden Ebenenpaares proportional. Dies liefert uns ein Mittel, den absoluten Wert dieser Strahlenkoordinaten zu fixieren. Es scheint am einfachsten zu sein, wenn wir $p = \frac{\varepsilon_0}{4}$ wählen, weil dann der Koeffizient von $\xi_{\mathfrak{a}}\,\omega_{\mathfrak{b}} - \xi_{\mathfrak{b}}\,\omega_{\mathfrak{a}}$ wegfällt. Besser ist es indessen, was das folgende bestätigen wird, wenn wir $p = 1$ setzen.

Die positive Seite der Stellung $\chi'_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ soll mit der positiven Seite der Ebene $\xi_{\mathfrak{a}}$ übereinstimmen.

Zu demselben Resultate gelangen wir, wenn wir zwei zu $\xi_{\mathfrak{a}}$ parallele Ebenen zur Berechnung der $\chi'_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ verwenden.

Die definierten Werte

$$\chi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \frac{\chi'_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{p} = \frac{4}{\varepsilon_0}\,(\xi_{\mathfrak{a}}\,\omega_{\mathfrak{b}} - \xi_{\mathfrak{b}}\,\omega_{\mathfrak{a}}) \tag{204}$$

nennen wir die genauen Stellungskoordinaten zweiter Art. Wenn wir beachten, dass ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 die Koordinaten der unendlich fernen Ebene sind, so haben wir für die genauen Stellungskoordinaten zweiter Art folgende doppelte Definition. Diese Koordinaten sind die Determinanten zweiten Grades, die sich aus den Koordinaten zweier parallelen Ebenen von der Distanz „Eins" bilden lassen oder die mit $\frac{4}{\varepsilon_0}$ multiplizierten Determinanten zweiten Grades, die sich aus den Koordinaten der unendlich fernen Ebene und einer endlichen Ebene bilden lassen.

96. Die Koordinaten χ_{ab} erfüllen die linearen, homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= \cdot \quad \omega_2 \chi_{34} + \omega_3 \chi_{42} + \omega_4 \chi_{23} \\
0 &= \omega_1 \chi_{43} \quad \cdot \quad + \omega_3 \chi_{14} + \omega_4 \chi_{31} \\
0 &= \omega_1 \chi_{24} + \omega_2 \chi_{41} \quad \cdot \quad + \omega_4 \chi_{12} \\
0 &= \omega_1 \chi_{32} + \omega_2 \chi_{13} + \omega_3 \chi_{21} \quad \cdot \quad ,
\end{aligned} \tag{205}$$

welche den Gleichungen (194) entsprechen. Multipliziert man diese der Reihe nach mit ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, so ergiebt ihre Summe identisch Null. Multipliziert man aber die erste mit χ_{14}, die zweite mit χ_{24}, die dritte mit χ_{34}, so ergiebt sich, da ω_4 nicht null ist,

$$\chi_{23} \chi_{14} + \chi_{31} \chi_{24} + \chi_{12} \chi_{34} = 0. \tag{206}$$

Nimmt man diese Gleichung stets als erfüllt an, so sind von den Gleichungen (205) im allgemeinen nur zwei unabhängig. Ist eine der Koordinaten χ_{ab} gleich Null, so gilt die Bemerkung am Schlusse des Art. 86.

97. Setzen wir in (205) an Stelle der unendlich fernen Ebene eine beliebige im Endlichen gelegene Ebene ζ_a, so sind auch von den Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= \cdot \quad \zeta_2 \chi_{34} + \zeta_3 \chi_{42} + \zeta_4 \chi_{23} \\
0 &= \zeta_1 \chi_{43} \quad \cdot \quad + \zeta_3 \chi_{14} + \zeta_4 \chi_{31} \\
0 &= \zeta_1 \chi_{24} + \zeta_2 \chi_{41} \quad \cdot \quad + \zeta_4 \chi_{12} \\
0 &= \zeta_1 \chi_{32} + \zeta_2 \chi_{13} + \zeta_3 \chi_{21} \quad \cdot
\end{aligned} \tag{207}$$

im allgemeinen nur zwei unabhängig. Diese Gleichungen drücken aus, dass die drei Ebenen ζ_a, ω_a und ξ_a durch eine Gerade gehen, dass also die Ebene ζ_a die Stellung χ_{ab} besitzt.

98. Besitzt die Ebene ζ_a nicht die Stellung χ_{ab}, so kann man setzen

$$\begin{aligned}
\sigma w_1 &= \cdot \quad \zeta_2 \chi_{34} + \zeta_3 \chi_{42} + \zeta_4 \chi_{23} \\
\sigma w_2 &= \zeta_1 \chi_{43} \quad \cdot \quad + \zeta_3 \chi_{14} + \zeta_4 \chi_{31} \\
\sigma w_3 &= \zeta_1 \chi_{24} + \zeta_2 \chi_{41} \quad \cdot \quad + \zeta_4 \chi_{12} \\
\sigma w_4 &= \zeta_1 \chi_{32} + \zeta_2 \chi_{13} + \zeta_3 \chi_{21} \quad \cdot \quad .
\end{aligned} \tag{208}$$

Dann ist nach (205)

$$\omega_1 w_1 + \omega_2 w_2 + \omega_3 w_3 + \omega_4 w_4 = 0$$

und es kann σ so bestimmt werden, dass die w_a der Gleichung

$$-1 = E(w)$$

genügen. Es stellen somit die w_a eine Richtung dar. Da nun sowohl

$$\zeta_1 w_1 + \zeta_2 w_2 + \zeta_3 w_3 + \zeta_4 w_4 = 0$$

ist, als auch nach (206) die Gleichungen stattfinden

$$\begin{array}{llllll} \cdot & \chi_{12} w_2 & + \chi_{13} w_3 & + \chi_{14} w_4 & = 0 \\ \chi_{21} w_1 & \cdot & + \chi_{23} w_3 & + \chi_{24} w_4 & = 0 \\ \chi_{31} w_1 & + \chi_{32} w_2 & \cdot & + \chi_{34} w_4 & = 0 \\ \chi_{41} w_1 & + \chi_{42} w_2 & + \chi_{43} w_3 & \cdot & = 0, \end{array} \tag{209}$$

welche, wie wir gleich sehen werden, die Incidenz der Richtung w_a mit der Stellung χ_{ab} darstellen, so ist die nach (208) berechnete Richtung w_a diejenige Richtung, welche der Stellung von ζ_a und der Stellung χ_{ab} gemeinsam ist. Der Faktor σ ist gleich $\frac{4}{\varepsilon_0} \tau \sin \varphi$, wo φ der Winkel der Ebene ζ_a und der Stellung χ_{ab} ist.

99. Wir haben noch die behauptete Bedeutung der Gleichungen (209) zu beweisen. Es ist nämlich

$$w_1 \omega_1 + w_2 \omega_2 + w_3 \omega_3 + w_4 \omega_4 = 0;$$

setzt man noch

$$w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + w_3 \xi_3 + w_4 \xi_4 = W,$$

so folgt durch Elimination von w_1

$$\cdot \quad \chi_{12} w_2 + \chi_{13} w_3 + \chi_{14} w_4 = -\frac{4}{\varepsilon_0} \omega_1 W = 0,$$

welche Gleichung nur statthaben kann, wenn $W = 0$, d. h. die Richtung w_a der Ebene ξ_a und damit der Stellung χ_{ab} angehört. Damit ist aber das Behauptete bewiesen.

100. Wir gehen nun dazu über, die nicht homogene Gleichung zweiten Grades abzuleiten, welcher die wahren χ_{ab} genügen müssen. Wir berechnen dazu, wie bei den Koordinaten q_{ab}, die Koordinaten der durch den willkürlichen Punkt z_a gehende Ebenen, welche die Stellung χ_{ab} besitzt. Sind χ_a diese Koordinaten, so ist

$$\chi_a = \xi_a - \frac{4}{\varepsilon_0} r \cdot \omega_a, \tag{210}$$

wo r der Abstand des Punktes z_a von der Ebene ξ_a, also

$$r = \frac{\varepsilon_0}{4} (z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2 + z_3 \xi_3 + z_4 \xi_4)$$

ist. Setzt man nun

$$\chi'_{ab} = \xi_a \omega_b - \xi_b \omega_a,$$

so dass

$$\chi_{ab} = \frac{4}{\varepsilon_0} \chi'_{ab},$$

so folgt aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \chi'_{a1} &= \xi_a \omega_1 - \xi_1 \omega_a \\ \chi'_{a2} &= \xi_a \omega_2 - \xi_2 \omega_a \\ \chi'_{a3} &= \xi_a \omega_3 - \xi_3 \omega_a \\ \chi'_{a4} &= \xi_a \omega_4 - \xi_4 \omega_a \end{aligned} \tag{211}$$

durch Multiplikation mit z_1, z_2, z_3 und z_4 und Addition

$$\chi'_{a1} z_1 + \chi'_{a2} z_2 + \chi'_{a3} z_3 + \chi'_{a4} z_4 = \xi_a - \omega_a \frac{4}{\varepsilon_0} r = \chi_a.$$

Es ist somit

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \quad\cdot\quad + \chi'_{12} z_2 + \chi'_{13} z_3 + \chi'_{14} z_4 \\ \chi_2 &= \chi'_{21} z_1 \quad\cdot\quad + \chi'_{23} z_3 + \chi'_{24} z_4 \\ \chi_3 &= \chi'_{31} z_1 + \chi'_{32} z_2 \quad\cdot\quad + \chi'_{34} z_4 \\ \chi_4 &= \chi'_{41} z_1 + \chi'_{42} z_2 + \chi'_{43} z_3 \quad\cdot\quad . \end{aligned} \tag{212}$$

Dies sind die gesuchten Koordinaten der Ebene, welche den Punkt z_a mit dem unendlich fernen Strahle $\chi_{ab} = \frac{4}{\varepsilon_0} \chi'_{ab}$ verbindet.

Die Werte χ_a müssen der Bedingungsgleichung der Ebenenkoordinaten genügen, d. h. es ist

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 = W(\chi \mid \chi). \tag{213}$$

Setzen wir noch

$$\chi'_a = \frac{4}{\varepsilon_0} \chi_a,$$

so dass sich die χ'_a in eben derselben Weise aus den wahren χ_{ab} zusammensetzen, wie die χ_a aus den χ'_{ab}, so geht die obige Gleichung über in

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^4 = W(\chi' \mid \chi'). \tag{214}$$

Dies ist die Bedingungsgleichung, der die wahren Strahlenkoordinaten der zweiten Art genügen. Infolge der Variabilität der z_a involviert dieselbe die Gleichung (205).

101. Wieder tritt in der Bedingungsgleichung ein willkürlicher Punkt z_a auf, der aber auf die Gleichung keinen wesent-

lichen Einfluss ausüben kann. Lassen wir diesen Punkt mit dem Einheitspunkt zusammenfallen, was wir wieder durch Überstreichen der betreffenden Grössen andeuten wollen, so lautet die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 = W(\bar{\chi} \mid \bar{\chi})$$

oder

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^4 = W(\bar{\chi}' \mid \bar{\chi}'),$$

wenn

$$\bar{\chi}_a = \chi_{a1}' + \chi_{a2}' + \chi_{a3}' + \chi_{a4}'$$

und

$$\bar{\chi}_a' = \chi_{a1} + \chi_{a2} + \chi_{a3} + \chi_{a4}.$$

Lassen wir aber z_a mit einer Tetraederecke zusammenfallen, so erhalten wir die einfachste aber unsymmetrische Form der Bedingungsgleichung. Es ist z. B. für $z_a = \left(\frac{1}{\omega_1}, 0, 0, 0\right)$

$$\chi_1' = 0, \; \chi_2' = \frac{1}{\omega_1}\chi_{21}, \; \chi_3' = \frac{1}{\omega_1}\chi_{31}, \; \chi_4' = \frac{1}{\omega_1}\chi_{41}$$

und die Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned} -\omega_1^2\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^4 = \frac{D_{22}}{\delta_2^2}\chi_{21}^2 + \frac{D_{33}}{\delta_3^2}\chi_{31}^2 + \frac{D_{44}}{\delta_4^2}\chi_{41}^2 + 2\,\frac{D_{34}}{\delta_3\,\delta_4}\chi_{31}\chi_{41} \\ + 2\,\frac{D_{42}}{\delta_4\,\delta_2}\chi_{41}\chi_{21} + 2\,\frac{D_{23}}{\delta_2\,\delta_3}\chi_{21}\chi_{31}\,. \end{aligned} \tag{215}$$

Es genügen somit schon drei der Koordinaten χ_{ab}, die einen Index gemein haben, einer quadratischen, nicht homogenen Gleichung.

102. Die Bedeutung der Gleichungen

$$W(q \mid q) = 0 \text{ und } W(\chi \mid \chi) = 0$$

ist der Herleitung derselben gemäss unmittelbar klar. Sie stellen in der unendlich fernen Ebene den absoluten Kegelschnitt dar und zwar umhüllt von seinen Tangenten.

103. Beziehen sich die Stellungskoordinaten erster Art q_{ab} und die Stellungskoordinaten zweiter Art χ_{ab} auf denselben Strahl, so besteht zwischen diesen Koordinaten Proportionalität. Wir beweisen dies folgendermassen.

Es seien u_a und v_a zwei normale Richtungen, welche die Stellung q_{ab} definieren. Die durch z_a gehende Ebene dieser Stellung hat nach (189) die Koordinaten

$$\xi_a = \frac{4}{\varepsilon_0} \cdot \nabla \cdot q_a ,$$

wo

$$\begin{aligned} q_1 &= \quad\cdot \quad z_2\, q_{34} + z_3\, q_{42} + z_4\, q_{23} \\ q_2 &= z_1\, q_{43} \quad\cdot\quad + z_3\, q_{14} + z_4\, q_{31} \\ q_3 &= z_1\, q_{24} + z_2\, q_{41} \quad\cdot\quad + z_4\, q_{12} \\ q_4 &= z_1\, q_{32} + z_2\, q_{13} + z_3\, q_{21} \quad\cdot \end{aligned}$$

Wir benützen nun diese Ebene ξ_a zur Berechnung der Strahlenkoordinaten zweiter Art und erhalten

$$\begin{aligned} \chi_{ab} &= \frac{4}{\varepsilon_0} (\xi_a\, \omega_b - \xi_b\, \omega_a) \\ &= \left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \nabla (q_a\, \omega_b - q_b\, \omega_a) \\ &= \tau \cdot q_{cb} \quad (abcb = +) \end{aligned} \tag{216}$$

nach (202). Wir haben somit das folgende Resultat: Die Stellungskoordinaten erster Art gehen in die entsprechenden Stellungskoordinaten zweiter Art über durch Multiplikation mit **demselben** Faktor τ, mit dem man auch die Strahlenkoordinaten erster Art multiplizieren muss, damit sie in die entsprechenden Strahlenkoordinaten zweiter Art übergehen.

104. Nach Einführung der Stellungskoordinaten sind nun eine Reihe diesbezüglicher Aufgaben zu erledigen. Wir beginnen mit der Untersuchung derjenigen Ausdrücke in Strahlenkoordinaten, die beim Uebergang zu Stellungskoordinaten ihre metrische Bedeutung verlieren.

Sind q_{ab} und q^*_{ab} die Koordinaten zweier Stellungen, so hat der Ausdruck

$$q_{23}\, q^*_{14} + q_{31}\, q^*_{24} + q_{12}\, q^*_{34} + q_{14}\, q^*_{23} + q_{24}\, q^*_{31} + q_{34}\, q^*_{12}$$

stets den Wert Null, denn zwei unendlich ferne Gerade schneiden sich stets. Der analytische Nachweis ergiebt sich leicht aus den Formeln (181) und den entsprechenden für q^*_{ab}.

Der Ausdruck

$$p_{23}\, p^*_{14} + p_{31}\, p^*_{24} + p_{12}\, p^*_{34} + p_{14}\, p^*_{23} + p_{24}\, p^*_{31} + p_{34}\, p^*_{12} ,$$

welcher bei zwei Strahlen des endlichen Raumes bis auf den Faktor ∇ das Moment derselben darstellt, verliert seine Bedeutung, wenn der eine Strahl p^*_{ab} ins Unendliche rückt und damit in eine Stellung q_{ab} übergeht. Um die Frage nach der neuen Bedeutung des entsprechenden Ausdrucks beantworten zu können, gehen wir aus von der Formel

$$\sin(u\,v\,w) = \nabla . \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} \tag{217}$$

des Artikels 39 und nehmen an, dass x_a auf dem Strahl p_{ab} liege und dass u_a dessen Richtung sei, sowie, dass die als normal vorausgesetzten Richtungen v_a und w_a die Stellung q_{ab} definieren. Dann ist, wenn φ der Winkel des Strahles p_{ab} und der Stellung q_{ab} ist,

$$\sin(u\,v\,w) = \sin\varphi,$$
$$p_{ab} = u_a\,x_b - u_b\,x_a \qquad \text{nach (152)}$$
$$q_{ab} = w_a\,v_b - w_b\,v_a$$

und daher

$$\sin\varphi = \nabla\,(p_{23}\,q_{14} + \cdot\cdot + p_{14}\,q_{23} + \cdot\cdot). \tag{218}$$

Diese Formel liefert den Winkel φ positiv, wenn die positive Richtung des Strahles p_{ab} auf die positive Seite der Stellung q_{ab} geht (vergl. Art. 39 und 52).

Man sieht, dass von den beiden Faktoren, aus denen das Moment besteht, der eine, der kürzeste Abstand der Windschiefen, dadurch aus der Formel verschwunden ist, dass er Eins geworden ist. Hieran knüpft sich die folgende Betrachtung.

105. Wenn ein Strahl ins Unendliche rückt, so werden seine Koordinaten p_{ab} unendlich gross. Dadurch, dass man diese Werte von einem gemeinschaftlichen, unendlich gross werdenden Faktor befreit, kann man erreichen, dass die p_{ab} gerade in die q_{ab} übergehen. Die obige Formel zeigt nun, dass man als diesen Faktor den Abstand r des Strahles p_{ab} von einem beliebigen im Endlichen gelegenen Punkt nehmen darf, so dass

$$q_{ab} = \lim_{r=\infty} \frac{p_{ab}}{r}. \tag{219}$$

Zu derselben Auffassung gelangen wir auch, wenn wir von der Formel ausgehen (Art. 78)

$$r^2 = -\left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^4 \sum \frac{D_{ab}}{\delta_a \delta_b} (\pi_{a1} z_1 + \pi_{a2} z_2 + \cdot\cdot)(\pi_{b1} z_1 + \pi_{b2} z_2 + \cdot\cdot),$$

welche den Abstand r des Punktes z_a von dem Strahle π_{ab} angiebt. Ersetzen wir in derselben den Strahl π_{ab} durch die Stellung χ_{ab}, so wird nach der Bedingungsgleichung (214) der χ_{ab} die auf der rechten Seite stehende Summe gleich $-\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^4$, sodass $r^2 = 1$ wird. Es ist also auch hier

$$\chi_{ab} = \lim_{r=\infty} \frac{\pi_{ab}}{r}. \tag{220}$$

Diese Auffassung der Stellungskoordinaten erklärt uns nicht nur, warum gleichzeitig

$$\pi_{ab} = \tau \cdot p_{cb} \quad \text{und} \quad \chi_{ab} = \tau \cdot q_{cb},$$

sondern auch das Auftreten eines willkürlichen Punktes in einer Reihe von Formeln, namentlich in den Bedingungsgleichungen der Stellungskoordinaten.

106. Die Formel über das Teilverhältnis lässt sich leicht auf Stellungen übertragen. Sind q_{ab} und q^*_{ab} zwei Stellungen, so zeigen die Gleichungen (181) zunächst, dass die $\bar{q}_{ab}$, berechnet aus

$$\varrho\, \bar{q}_{ab} = q_{ab} - \lambda \cdot q^*_{ab} \tag{221}$$

ebenfalls eine Stellung definieren. Dabei ist noch ϱ passend zu bestimmen. Berechnet man nun nach den Formeln (192) mit Hülfe desselben Punktes z_a die Werte

$$\bar{q}_a, \quad q_a, \quad q^*_a,$$

so ist auch

$$\varrho\, \bar{q}_a = q_a - \lambda\, q^*_a.$$

Für die Koordinaten der durch z_a gehenden Ebenen von den Stellungen $\bar{q}_{ab}$, q_{ab}, q^*_{ab} ist nach (189)

$$\bar{\xi}_a = \frac{4}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \bar{q}_a, \quad \xi_a = \frac{4}{\varepsilon_0} \nabla \cdot q_a, \quad \xi^*_a = \frac{4}{\varepsilon_0} \nabla \cdot q^*_a$$

und daher

$$\varrho\, \bar{\xi}_a = \xi_a - \lambda\, \xi^*_a. \tag{222}$$

Daraus geht hervor, dass

$$\varrho = \sqrt{1 - 2\lambda \cos\varphi + \lambda^2},$$

wo φ der Winkel der beiden Ebenen ξ_a und ξ_a^* und daher auch der Winkel der beiden Stellungen q_{ab} und q_{ab}^* ist, und dass λ das Teilverhältnis ist, in welchem die Stellung $\bar{q}_{ab}$ den Winkel der Stellungen q_{ab} und q_{ab}^* teilt.

Für den Winkel φ der beiden Stellungen ergiebt sich gleichzeitig die Formel

$$\cos\varphi = \nabla^2\, W(q_a \mid q_a^*). \tag{223}$$

107. Auch der Sinus des eben angegebenen Winkels φ lässt sich, wenn auch etwas umständlicher, berechnen.

Die Koordinaten χ_a und χ_a^* der durch den Punkt z_a gehenden Ebenen von den Stellungen χ_{ab} und χ_{ab}^* bestimmen sich nach Art. 100 durch die Gleichungen

$$\frac{4}{\varepsilon_0}\chi_a = \chi_{a1} z_1 + \chi_{a2} z_2 + \chi_{a3} z_3 + \chi_{a4} z_4$$
$$\frac{4}{\varepsilon_0}\chi_a^* = \chi_{a1}^* z_1 + \chi_{a2}^* z_2 + \chi_{a3}^* z_3 + \chi_{a4}^* z_4.$$

Für den Winkel φ folgt nun aus den Gleichungen

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \cos\varphi = W(\chi \mid \chi^*)$$
$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 = W(\chi \mid \chi) = W(\chi^* \mid \chi^*)$$

die Beziehung

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^4 \sin^2\varphi = W(\chi \mid \chi)\cdot W(\chi^* \mid \chi^*) - W(\chi \mid \chi^*)^2. \tag{224}$$

Vergleicht man damit die Entwicklungen des Artikels 77, so ergiebt sich

$$\tau^2 \sin^2\varphi = -E(v'), \tag{225}$$

wobei

$$\begin{aligned} v_1' &= \phantom{\omega_1 \pi_{43}' +{}} \omega_2 \pi_{34}' + \omega_3 \pi_{42}' + \omega_4 \pi_{23}' \\ v_2' &= \omega_1 \pi_{43}' \phantom{{}+ \omega_2 \pi_{34}'} + \omega_3 \pi_{14}' + \omega_4 \pi_{31}' \\ v_3' &= \omega_1 \pi_{24}' + \omega_2 \pi_{41}' \phantom{{}+ \omega_3 \pi_{14}'} + \omega_4 \pi_{12}' \\ v_4' &= \omega_1 \pi_{32}' + \omega_2 \pi_{13}' + \omega_3 \pi_{21}' \end{aligned} \tag{226}$$

und

$$\pi_{ab}' = \chi_a^* \chi_b - \chi_b^* \chi_a. \tag{227}$$

Die v_a', welche in (225) auftreten, enthalten die Koordinaten des willkürlichen Punktes z_a, welcher nach dem geometrischen Inhalt der Formel auf dieselbe keinen Einfluss ausüben kann. Um

dies analytisch nachzuweisen und die v'_a von diesem Punkte zu befreien, führen wir vier unbestimmte Grössen ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4 ein und bilden den Ausdruck

$$\vartheta_1 v'_1 + \vartheta_2 v'_2 + \vartheta_3 v'_3 + \vartheta_4 v'_4 = \begin{vmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & \vartheta_4 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \overset{*}{\chi}_1 & \overset{*}{\chi}_2 & \overset{*}{\chi}_3 & \overset{*}{\chi}_4 \\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 & \chi_4 \end{vmatrix}.$$

Von der mit ω_1 multiplizierten zweiten Spalte subtrahieren wir die mit ω_2 multiplizierte erste Spalte und führen die entsprechenden Operationen auch in Bezug auf die dritte und erste, sowie die vierte und erste Spalte aus. Da nun, wie leicht zu sehen ist,

$$\omega_a \chi_b - \omega_b \chi_a = \frac{\varepsilon_0}{4} \chi_{ba} \tag{228}$$

ist, so erhält man

$$\omega_1^3 (\vartheta_1 v'_1 + \vartheta_2 v'_2 + \vartheta_3 v'_3 + \vartheta_4 v'_4) = \begin{vmatrix} \vartheta_1, & \omega_1\vartheta_2 - \omega_2\vartheta_1, & \omega_1\vartheta_3 - \omega_3\vartheta_1, & \omega_1\vartheta_4 - \omega_4\vartheta_1 \\ \omega_1, & 0, & 0, & 0 \\ \overset{*}{\chi}_1, & \frac{\varepsilon_0}{4}\overset{*}{\chi}_{21}, & \frac{\varepsilon_0}{4}\overset{*}{\chi}_{31}, & \frac{\varepsilon_0}{4}\overset{*}{\chi}_{41} \\ \chi_1, & \frac{\varepsilon_0}{4}\chi_{21}, & \frac{\varepsilon_0}{4}\chi_{31}, & \frac{\varepsilon_0}{4}\chi_{41} \end{vmatrix}$$

oder

$$\omega_1^2 (\vartheta_1 v'_1 + \vartheta_2 v'_2 + \cdot\cdot) = \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^2 \begin{vmatrix} \vartheta_1, & \omega_1\vartheta_2 - \omega_2\vartheta_1, & \omega_1\vartheta_3 - \omega_3\vartheta_1, & \omega_1\vartheta_4 - \omega_4\vartheta_1 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \overset{*}{\chi}_{21}, & \overset{*}{\chi}_{31}, & \overset{*}{\chi}_{41} \\ 0, & \chi_{21}, & \chi_{31}, & \chi_{41} \end{vmatrix}$$

Addiert man wieder das ω_a-fache der ersten Spalte zur a-ten Spalte, so findet man endlich

$$\omega_1^2 (\vartheta_1 v'_1 + \vartheta_2 v'_2 + \vartheta_3 v'_3 + \vartheta_4 v'_4) = \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^2 \begin{vmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & \vartheta_4 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ 0 & \overset{*}{\chi}_{12} & \overset{*}{\chi}_{13} & \overset{*}{\chi}_{14} \\ 0 & \chi_{12} & \chi_{13} & \chi_{14} \end{vmatrix}.$$

Bevorzugt man statt der ersten Spalte die a-te Spalte, so ergiebt sich in gleicher Weise

$$\omega_a^2 (\vartheta_1 v'_1 + \vartheta_2 v'_2 + \vartheta_3 v'_3 + \vartheta_4 v'_4) = \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^2 \begin{vmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & \vartheta_4 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \overset{*}{\chi}_{a1} & \overset{*}{\chi}_{a2} & \overset{*}{\chi}_{a3} & \overset{*}{\chi}_{a4} \\ \chi_{a1} & \chi_{a2} & \chi_{a3} & \chi_{a4} \end{vmatrix}. \tag{229}$$

Es ist also beispielsweise

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \omega_{\mathfrak{a}}^2 \cdot v_1' = \begin{vmatrix} \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \overset{*}{\chi}_{\mathfrak{a}2} & \overset{*}{\chi}_{\mathfrak{a}3} & \overset{*}{\chi}_{\mathfrak{a}4} \\ \chi_{\mathfrak{a}2} & \chi_{\mathfrak{a}3} & \chi_{\mathfrak{a}4} \end{vmatrix}$$

$$= \chi_{\mathfrak{a}2}\,(\omega_3 \overset{*}{\chi}_{\mathfrak{a}4} + \omega_4\, \overset{*}{\chi}_{3\mathfrak{a}}) + \chi_{\mathfrak{a}3}\,(\omega_4\, \overset{*}{\chi}_{\mathfrak{a}2} + \omega_2\, \overset{*}{\chi}_{4\mathfrak{a}}) + \chi_{\mathfrak{a}4}\,(\omega_2\, \overset{*}{\chi}_{\mathfrak{a}3} + \omega_3\, \overset{*}{\chi}_{2\mathfrak{a}}).$$

Dieser Ausdruck kann noch weiter vereinfacht werden. Unter Benützung der Formeln (205) erhält man

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \omega_{\mathfrak{a}}\, v_1' = \overset{*}{\chi}_{34}\, \chi_{\mathfrak{a}2} + \overset{*}{\chi}_{42}\, \chi_{\mathfrak{a}3} + \overset{*}{\chi}_{23}\, \chi_{\mathfrak{a}4}. \tag{230}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist dreigliedrig, falls $\mathfrak{a} = 1$ ist, dagegen nur zweigliedrig, wenn $\mathfrak{a} = 2$, 3 oder 4 ist. Man hat also z. B.

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \omega_1\, v_1' &= \quad\cdot\quad \overset{*}{\chi}_{34}\, \chi_{12} + \overset{*}{\chi}_{42}\, \chi_{13} + \overset{*}{\chi}_{23}\, \chi_{14} \\
\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \omega_2\, v_2' &= \overset{*}{\chi}_{43}\, \chi_{21} \quad\cdot\quad + \overset{*}{\chi}_{14}\, \chi_{23} + \overset{*}{\chi}_{31}\, \chi_{24} \\
\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \omega_3\, v_3' &= \overset{*}{\chi}_{24}\, \chi_{31} + \overset{*}{\chi}_{41}\, \chi_{32} \quad\cdot\quad + \overset{*}{\chi}_{12}\, \chi_{34} \\
\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2 \omega_4\, v_4' &= \overset{*}{\chi}_{32}\, \chi_{41} + \overset{*}{\chi}_{13}\, \chi_{42} + \overset{*}{\chi}_{21}\, \chi_{43} \quad\cdot\quad .
\end{aligned}\right\} \tag{231}$$

Bei der Vertauschung der beiden Stellungen gehen die rechten Seiten dieser Gleichungen zufolge der Beziehung

$$\chi_{23}\, \overset{*}{\chi}_{14} + \chi_{31}\, \overset{*}{\chi}_{24} + \chi_{12}\, \overset{*}{\chi}_{34} + \chi_{14}\, \overset{*}{\chi}_{23} + \chi_{24}\, \overset{*}{\chi}_{31} + \chi_{34}\, \overset{*}{\chi}_{12} = 0$$

in ihre entgegengesetzten Werte über.

Beachtet man, dass

$$\overset{*}{\chi}_{34} = \tau\, \overset{*}{q}_{12} \text{ u. s. w.}$$

ist, so kann man die Gleichungen (231) zusammenziehen in

$$\omega_{\mathfrak{a}}\, v_{\mathfrak{a}}' = \nabla \sum_{\mathfrak{p}} \overset{*}{q}_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}}\, \chi_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}} = -\nabla \sum_{\mathfrak{p}} q_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}}\, \overset{*}{\chi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}}. \tag{232}$$

Setzt man nun diese Werte in (225) ein, so erhält man schliesslich

$$-\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^4 \sin^2\varphi = \sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^2 \sum_{\mathfrak{p}} \overset{*}{q}_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}}\, \chi_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}} \sum_{\mathfrak{q}} \overset{*}{q}_{\mathfrak{b}\mathfrak{q}}\, \chi_{\mathfrak{b}\mathfrak{q}}. \tag{233}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite kann noch mannigfach umgeformt werden zufolge der linearen Gleichungen, der die Stellungskoordinaten genügen. In der obigen Form enthält er 54 Glieder; wählt man dagegen für die $v_{\mathfrak{a}}'$ die zweigliedrigen Ausdrücke, so erhält man eine Summe von 24 Gliedern.

108. Anknüpfend an die Betrachtungen des Artikels 105 wollen wir durch den Punkt z_α, welcher von dem Strahle p_{ab} die Entfernung r habe, zu demselben den Parallelstrahl p^*_{ab} legen. Wir berechnen die Koordinaten p^*_{ab} nach Artikel 75 aus den Koordinaten z_α und den Koordinaten

$$u_\alpha = p_{\alpha 1}\,\omega_1 + p_{\alpha 2}\,\omega_2 + p_{\alpha 3}\,\omega_3 + p_{\alpha 4}\,\omega_4$$

des unendlich fernen Punktes von p_{ab} und erhalten

$$\begin{aligned} p^*_{12} &= u_1 . z_2 - u_2\, z_1 \\ &= p_{12}\,(\omega_1\, z_1 + \omega_2\, z_2) + \omega_3\,(p_{13}\, z_2 + p_{32}\, z_1) + \omega_4\,(p_{14}\, z_2 + p_{42}\, z_1). \end{aligned}$$

Nun hat man nach Art. 79 für die Verbindungsebene ζ_α des Punktes z_α mit dem Strahle p_{ab}

$$\begin{aligned} \frac{4}{\varepsilon_0}\,\frac{r}{\tau} \cdot \zeta_3 &= z_1\, p_{24} + z_2\, p_{41} \quad \cdot \quad + z_4\, p_{12} \\ \frac{4}{\varepsilon_0}\,\frac{r}{\tau} \cdot \zeta_4 &= z_1\, p_{32} + z_2\, p_{13} + z_3\, p_{21} \quad \cdot \quad , \end{aligned}$$

und daher wird

$$\begin{aligned} p^*_{12} &= p_{12}\,(\omega_1\, z_1 + \omega_2\, z_2) + \omega_3\left(\frac{4}{\varepsilon_0}\,\frac{r}{\tau} \cdot \zeta_4 + z_3\, p_{12}\right) + \omega_4\left(z_4\, p_{12} - \frac{4}{\varepsilon_0}\,\frac{r}{\tau}\,\zeta_3\right) \\ &= p_{12} + \frac{4}{\varepsilon_0}\,\frac{r}{\tau}\,(\omega_3\,\zeta_4 - \omega_4\,\zeta_3) \end{aligned}$$

oder

$$p^*_{12} = p_{12} - r\, q_{12}.$$

Allgemein erhält man

$$p^*_{ab} = p_{ab} - r\, q_{ab}. \tag{234}$$

Dabei ist also r der Abstand der beiden Parallelen p_{ab} und p^*_{ab} und q_{ab} die Stellungskoordinaten ihrer Verbindung.

Stellt man den gegebenen Strahl als Schnittlinie zweier normalen Ebenen ξ_α und η_α dar, und verschiebt man dieselben parallel um die Distanzen p und q, so werden die Koordinaten der parallel verschobenen Ebenen

$$\xi^*_\alpha = \xi_\alpha - \frac{4}{\varepsilon_0}\, p\, \omega_\alpha\,, \quad \eta^*_\alpha = \eta_\alpha - \frac{4}{\varepsilon_0}\, q\, \omega_\alpha\,.$$

Für den neuen Schnittstrahl ist dann

$$\pi^*_{ab} = \pi_{ab} - p\,\chi^{(\eta)}_{ab} + q\,\chi^{(\xi)}_{ab}$$

oder auch

$$p^*_{ab} = p_{ab} - p \cdot q^{(\eta)}_{ab} + q \cdot q^{(\xi)}_{ab} \tag{235}$$

in leicht verständlicher Bezeichnung. Da nun die Ebene der Pa-

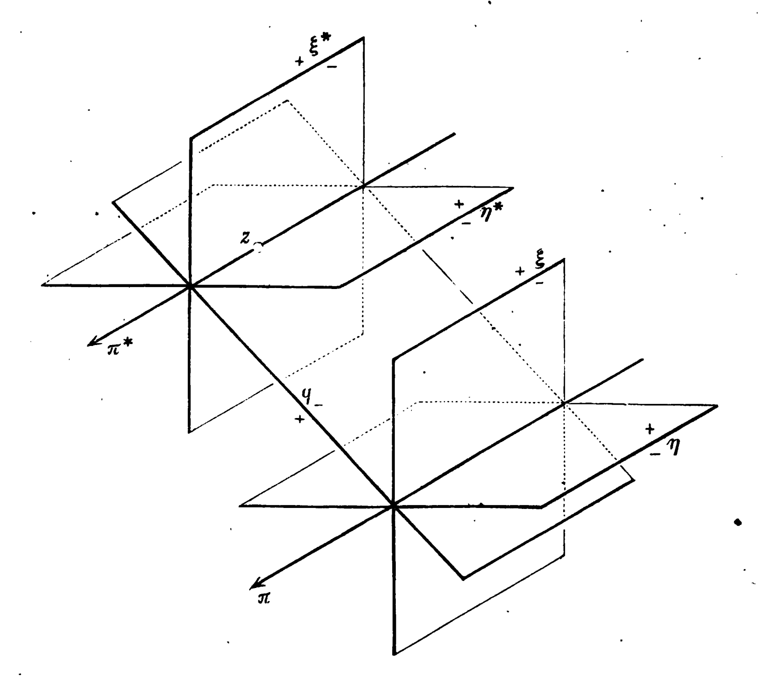
rallelen π_{ab} und π^*_{ab} gegenüber den Ebenen ξ_a und η_a das Teilverhältnis $\frac{p}{q}$ besitzt, so hat man nach Art. 106 für die betreffenden Stellungen

$$q_{ab}^{(\pi\pi^*)} = \frac{q_{ab}^{(\xi)} - (p:q)\, q_{ab}^{(\eta)}}{\sqrt{1+(p^2:q^2)}} = \frac{q \cdot q_{ab}^{(\xi)} - p \cdot q_{ab}^{(\eta)}}{r}. \tag{236}$$

Benützt man diese Gleichung, so kann (235) geschrieben werden

$$p^*_{ab} = p_{ab} + r \cdot q_{ab}^{(\pi\pi^*)}, \tag{234a}$$

bis auf ein Zeichen übereinstimmend mit (234).



Der Unterschied in den Formeln (234) und (234a) erklärt sich folgendermassen: Die Verbindungsebene $\pi\pi^*$ ist nämlich bei der ersten Bestimmungsart als Verbindungsebene eines Punktes z_a von π^*_{ab} mit π_{ab}, bei der zweiten Bestimmungsart aber als Ebene des Büschels (ξ, η) aufgefasst worden. Da nun diese beiden Bestimmungsarten auf Ebenen führen, die nur der Lage, nicht aber dem Vorzeichen der beiden Seiten nach übereinstimmen, so sind

auch nach Früherem die Werte q_{ab} nur bis auf die Vorzeichen einander gleich.

Dividiert man diese Formel durch r, lässt dann r über alle Grenzen wachsen unter Festhaltung der Geraden p_{ab}, so wird in der That

$$\lim_{r=\infty} \frac{p^*_{ab}}{r} = q_{ab},$$

wie wir schon in Artikel 105 erfahren haben. Man vergleiche übrigens mit (234 a) die Formeln

$$y_a = x_a + d\,u_a$$
$$\eta_a = \xi_a + \frac{4}{\varepsilon_0} p\,\omega_a,$$

an welche sich ähnliche Betrachtungen anknüpfen lassen. (Vergl. ferner Art. 75.)

109. Es sollen endlich noch die einer Stellung q_{ab} entsprechenden Koordinaten w_a der Normalrichtung und umgekehrt die einer Richtung w_a entsprechenden Koordinaten der Normalstellung berechnet werden. Die vier Grössen w_a und die sechs Grössen q_{ab} müssen linear von einander abhängig sein.

Nach Art. 90 stellen

$$\xi_a = \frac{4}{\varepsilon_0} \nabla \cdot q_a, \tag{237}$$

wo

$$\begin{aligned} q_1 &= \quad\cdot\quad z_2\,q_{34} + z_3\,q_{42} + z_4\,q_{23} \\ q_2 &= z_1\,q_{43} \quad\cdot\quad + z_3\,q_{14} + z_4\,q_{31} \\ q_3 &= z_1\,q_{24} + z_2\,q_{41} \quad\cdot\quad + z_4\,q_{12} \\ q_4 &= z_1\,q_{32} + z_2\,q_{13} + z_3\,q_{21} \quad\cdot \end{aligned}$$

die Koordinaten der Ebene dar, welche die Stellung q_{ab} besitzt und durch den Punkt z_a geht. Die positive Normalrichtung dieser Ebene ist aber nach Art. 57 bestimmt durch die Gleichungen

$$-\frac{4}{\varepsilon_0}\delta_a\,w_a = \frac{D_{a1}}{\delta_1}\xi_1 + \frac{D_{a2}}{\delta_2}\xi_2 + \frac{D_{a3}}{\delta_3}\xi_3 + \frac{D_{a4}}{\delta_4}\xi_4, \tag{238}$$

welche mittels (237) übergehen in

$$-\delta_a\,w_a = \nabla\left(\frac{D_{a1}}{\delta_1}q_1 + \frac{D_{a2}}{\delta_2}q_2 + \frac{D_{a3}}{\delta_3}q_3 + \frac{D_{a4}}{\delta_4}q_4\right).$$

Diese Werte hängen natürlich nur scheinbar von den Koordinaten des willkürlichen Punktes z_a ab.

Um die umgekehrte Aufgabe zu lösen, multiplizieren wir die Gleichungen (238) mit $d_{\mathfrak{a}1}^2$ und summieren sie. Man erhält

$$-\frac{4}{\varepsilon_0}(d_{21}^2\,\delta_2 w_2 + d_{31}^2\,\delta_3 w_3 + d_{41}^2\,\delta_4 w_4) = 2\,\triangle^2\frac{\xi_1}{\delta_1} - \left(\frac{D_{10}}{\delta_1}\,\xi_1 + \frac{D_{20}}{\delta_2}\,\xi_2 + \cdot\cdot\right).$$

Nimmt man nun an, die Ebene $\xi_\mathfrak{a}$ gehe durch den Mittelpunkt der dem Fundamentaltetraeder umschriebenen Kugel, so verschwindet die letzte Klammer in der vorstehenden Gleichung (vergl. Art. 54) und man erhält

$$-\frac{2}{\varepsilon_0}(d_{21}^2\,\omega_2\,w_2 + d_{31}^2\,\omega_3\,w_3 + d_{41}^2\,\omega_4\,w_4) = \frac{\xi_1}{\omega_1}.$$

Setzt man daher

$$t_\mathfrak{a} = \frac{1}{2}\,\omega_\mathfrak{a}\,(d_{\mathfrak{a}1}^2\,\omega_1\,w_1 + d_{\mathfrak{a}2}^2\,\omega_2\,w_2 + d_{\mathfrak{a}3}^2\,\omega_3\,w_3 + d_{\mathfrak{a}4}^2\,\omega_4\,w_4), \tag{239}$$

so wird

$$\xi_\mathfrak{a} = -\frac{4}{\varepsilon_0}\cdot t_\mathfrak{a}.$$

Diese Werte verwenden wir zur Berechnung der Stellung und finden

$$\chi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \tau\cdot q_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} = \left(\frac{4}{\varepsilon_0}\right)^2(\omega_\mathfrak{a}\,t_\mathfrak{b} - \omega_\mathfrak{b}\,t_\mathfrak{a})$$

oder

$$\nabla\,q_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} = \omega_\mathfrak{a}\,t_\mathfrak{b} - \omega_\mathfrak{b}\,t_\mathfrak{a}. \tag{240}$$

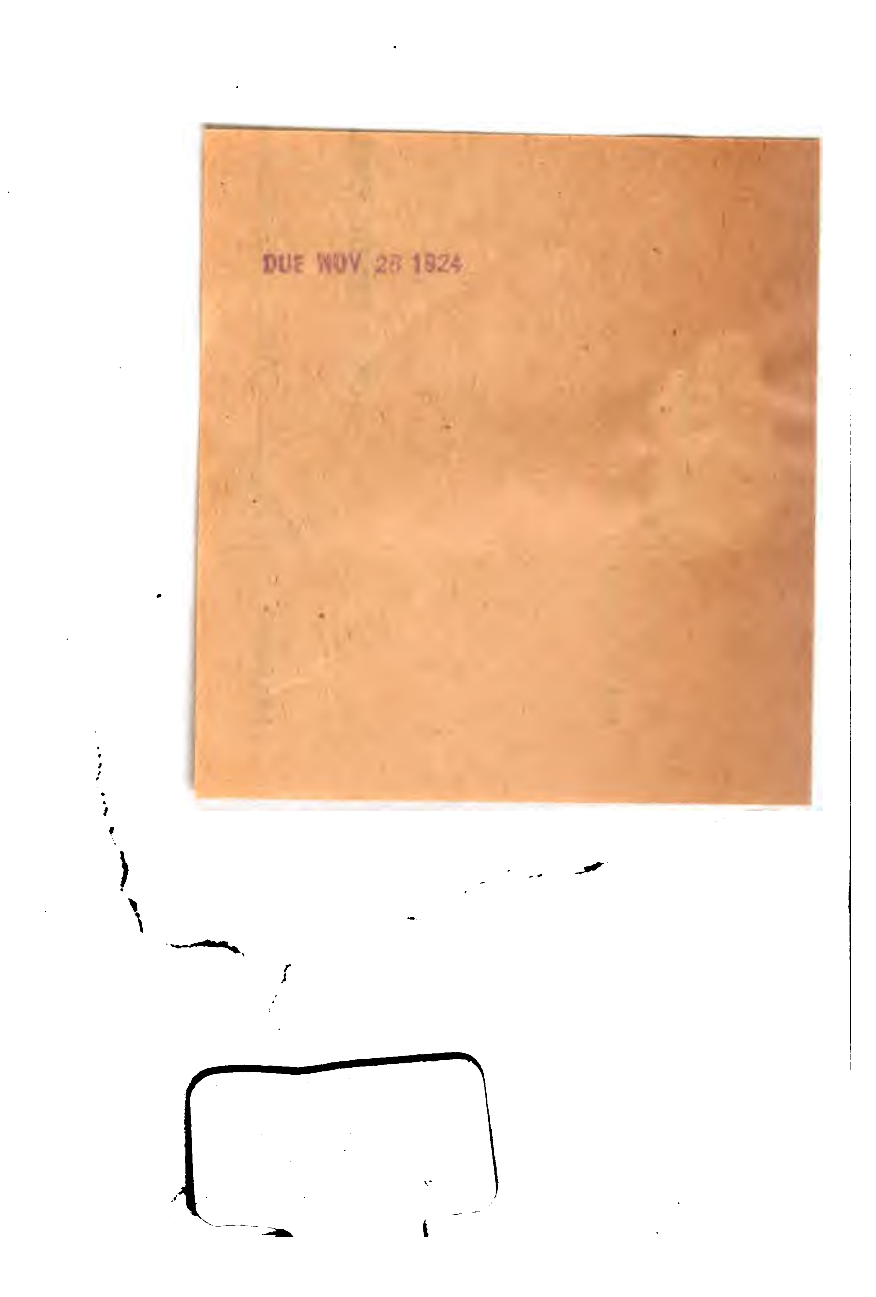
Damit ist die gestellte Aufgabe vollständig gelöst.

Wir merken noch die Gleichungen an

$$t_1\,w_1 + t_2\,w_2 + t_3\,w_3 + t_4\,w_4 = -1 \tag{241}$$

und

$$W(t,\,t) = 1. \tag{242}$$


DUE NOV 28 1924

